

KOMBINATORIKA

MATEMATIKA SEGÉDANYAG A TANÍTÓKÉPZÉSHEZ

C. Neményi Eszter ©

2015.

ELTE TANÍTÓ- ÉS ÓVÓKÉPZŐ KAR

SZERKESZTŐ:

Radnai Gyuláné Dr. Szendrei Julianna ©

LEKTOROK:

Wéber Anikó vezető tanító és a
Matematika Tanszék munkatársai

KIADJA:

ELTE TANÍTÓ- ÉS ÓVÓKÉPZŐ KAR

A segédanyag a 2003-ban megjelent kiadvány egy részletét tartalmazza.
Készült: az ELTE Tanító-és Óvóképző Kar Tanító szakos hallgatói számára.

Budapest, 2015.

KOMBINATORIKA

Kombinatorikus gondolkodás fejlesztésének menete

A kombinatorikus gondolkodásmód fejlesztésének lépcsőfokai (általános iskola 1–8. osztály) *(Varga Tamás nyomán)*

1. Adott feltételnek megfelelő egy vagy több eset előállítása (miközben tanulják figyelembe venni az adott feltételt)
2. Minél több eset előállítása az adott feltétel szerint (az előállítások során tanulják tartósan megtartani a szempontot, feltételt, az előállított objektumokat megkülönböztetik, azonosítják)
3. Az összes eset megkeresése a talált esetek rendezése és a rendszerben talált hiányok segítségével (a rendszerépítést a teljességre törekvés motiválhatja)
4. Adott feltételhez tartozó esetek megkereséséhez rendszer kiépítése „előre” (a már végigjárt alkotásokhoz való gondolati hasonlóság alapján)
5. Az esetek számának keresése (már csak elképzelt tevékenységgel vagy elkezdett tárgyi tevékenység képzeletbeli folytatásával)
6. Szemléleti tartalomban különböző, de matematikai tartalmukban egyező feladatok megoldása, „tudatos azonosítása”
7. Egy-egy matematikai változó rendszeres változtatása; az esetek számában megfigyelt változás szabályosságának megfigyelése, jellemzése, megadása a sorozat szabályával
- 8.* Két (több) matematikai változó rendszeres változtatása; az esetek számának táblázatba rendezése, a táblázatban található összefüggések megfigyelése, megadása
- 9.* A talált összefüggések magyarázata
- 10.* A felismert összefüggések alkalmazása további analóg matematikai problémákra

Kombinatorikus gondolkodás fejlesztése az alsó tagozaton

1. A kombinatorikus gondolkodásmód fejlesztésének első lépcsőfokai

1. Adott feltételnek megfelelő egy vagy több eset előállítása
2. Minél több eset előállítása az adott feltétel szerint
3. Az összes eset megkeresése a talált esetek rendezése és a rendszerben talált hiányok segítségével
4. Adott feltételhez tartozó esetek megkereséséhez rendszer kiépítése „előre” (a már végigjárt alkotásokhoz való gondolati hasonlóság alapján)

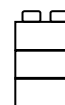
Ténylegesen elvégzendő feladatok: (Ezeket részint az órán javasoljuk elvégezni, elemezni, részint – amelyekre nem maradt idő, egyéni munkával hasonlóan valóságosan „lejátszani”, hogy igazán átéljék a megfelelő gondolati utakat!)

- 1. 3-féle színű legó-elemekből (más egyforma színes elemekből) tornyok építése.**
Alkossanak 3 szintes „tornyokat”; próbáljanak minél többfélét építeni; keressék az összes lehetőséget! Figyeljék meg és gyűjtsék össze azokat az ötleteket, hogy mi módon tudják megállapítani: elkészült-e az összes lehetséges torony!

Először az érdekli a gyerekeket, hogyan lehet építeni vele, mit lehet belőle építeni, esetleg, hogy minél magasabbat építsenek. Ha a szabad alkotásokra elegendő időt hagyunk, akkor felkelthetjük a gyerekek érdeklődését, hogy milyen pl. 3 szintű tornyokat tudnak alkotni.

Meg is mutatjuk a gyerekeknek, mifélekre gondolunk, hogy értelmezzük a 3 szintet.

Arra azonban nem kell mintát adnunk, hogy lehet egy „toronyban” 2-3 azonos színű is, hadd vetődjön fel alkotás közben a kérdés.



Első osztályban kétféle gondolati igényességet kezdünk kiépíteni. Az egyik a „szempont-tartás” az, hogy a feltételt (jelen esetben a 3 elemből való alkotást) a feladat egészében szem előtt tudják tartani. A másik pedig az, hogy alkotásaikat **folyamatosan ellenőrizzék**: nem alkottak-e már ugyanilyet, különbözik-e a készülő torony a többitől.

Később – esetleg csak 2. osztályban – továbbfejlődik a feladatvégzés azáltal, hogy megpróbálhatnak **minél többfélét** létrehozni az adott feltétel szerint, s még később formálható növendékeink teljességre való törekvése.

A **teljesség igénye** nem feltétlenül alakul ki a gyerekekben önmagától. Szükség lehet a tanító problémafelvetésére: van-e még másféle, vagy ennyiféle van, és nincs több.

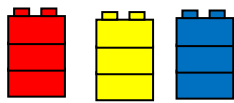
Hogyan láthatja át a kisgyerek, hogy sikerült-e minden lehetőséget megtalálnia, vagy ha nem, miféle hiányzik még? Ennek egy fontos és jó lehetősége, hogy az elkészített tornyokat valahogyan „szépen” elrendezik maguk előtt.

Jó körülményt jelent a rendszerezés fontosságának megértetésére az, ha kis csoportokban együtt próbálják megalkotni a gyerekek az összes tornyot. Ilyenkor sokszor már a munka megosztása is felveti valamiféle rendszer kialakításának, követésének igényét.

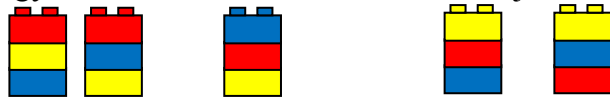
Miféle „rendek” alakulhatnak?

Feladat: Írja le lehetőleg minél pontosabban azt a rendezési módot, ahogyan az összes tornyot elrendezte! Vesse össze rendezését másokéval!

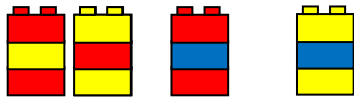
1. Lehet, hogy az egyik társaság külön rakja azokat a tornyokat, amelyek csupa azonos színűekből készültek, külön azokat, amelyekben 3 szín szerepel, s külön találunk rendszert abban a csoportban, amelyben 2 különböző színű elemet használtak. Például ez utóbbiakat úgy állítják párokba, hogy a kiválasztott két szín felcserélődjön bennük:



egy színből állók



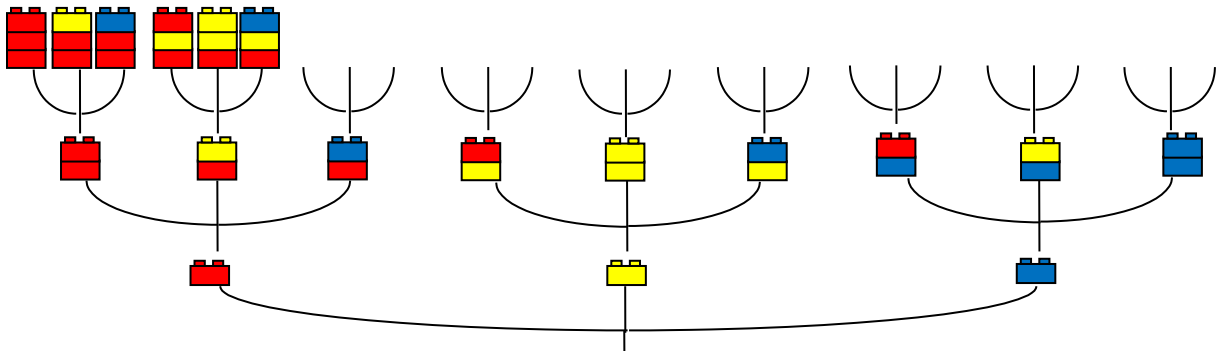
3 szín szerepel bennük



Feladat: Állapítsa meg, mifélek hiányoznak még, és azok hogyan illeszkednek bele az alakuló rendbe!

2. Máshol esetleg arra figyelnek, hogy milyen színű a torony alsó eleme, s külön rakják azokat, amelyeket pirossal kezdtek építeni, külön a sárga és külön a kék aljú tornyokat. Ez esetben ráérezhetnek arra, hogy a három csoportban ugyanannyi torony-nak kellene készülnie, s ez támpont lehet a hiány megállapításához, esetleg a hiányzó építmény megkereséséhez is. (Így szokták megfogalmazni: „szimmetria” oka van, hogy a három csoportban ugyanannyi féle torony lesz. Ennek a gondolatnak az a jelentése, hogy semmi sem magyarázná, miért lehetne többféleképpen folytatni az építést, ha alulra az egyik színt tesszük, mint ha a másikkal kezdtünk volna.)

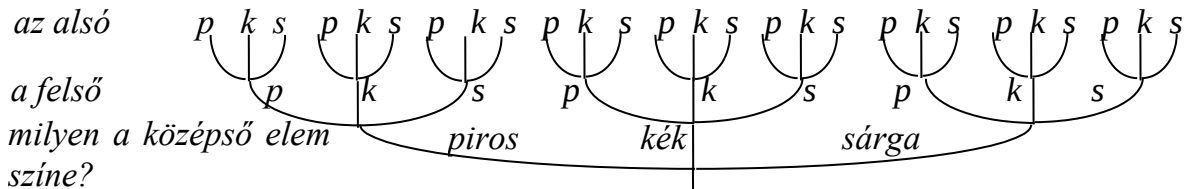
Ennek az elrendezésnek az is szépsége, hogy továbbvihető: bármelyik színnel kezd-ték, középre ismét háromfelét tehetnek, s bármilyen is az alsó kettő, mindig háromféle-képpen lehet befejezni a harmadik elemmel az építkezést. Ezt a rendszer-építést egy fához hasonlítható diagrammal szemléltethetjük (így is nevezzük: **fa-diagram**):



A fa alsó ágai egy csoportba gyűjtik azokat, amelyeken az alsó elem azonos színű. A következő szinten egy-egy ághoz azok az elemek tartoznak, amelyeknek (az alsó ele-men kívül) a középső eleme (is) azonos színű. Végül a felső ágak a felső szintre tett elemek szerint választják szét az elkészült tornyokat.

Feladat: a) Rendezze el a fenti fa-diagram szerint a többi megalkotott tornyot is! Kö-vesse alulról a fa ágait, s egy-egy esetben előre döntse el, hogy az adott ág-végződéshez melyik torony fog tartozni!

b) Rendezze el a tornyokat úgy is, hogy az alsó ágakon a középső elem színeit vegyék figyelembe, azaz azokat a tornyokat gyűjtsék össze, amelyeknek ugyanolyan színű elem van a közepén, a következő ágak a felső elemek színeit állítsák sorba mindenütt, s a legfelső ágak az alsó elemek szerint különböztessék meg az egyébként együvé sodródó tornyokat! (Haladjon lépésenként: először gyűjtse össze az összes tornyot, amely azonos alsó ágra fog kerülni, aztán egy-egy csoporton belül válassza együvé azokat, amelyek ugyanahhoz a középső ághoz tartoznak, s végül ezeket rakja sorba a felső ágak szerint!)



Ugyanezeket a tornyokat **táblázatosan** is elrendezhetjük. Például úgy, hogy a felső sorba tesszük az összest, amelynek piros az alsó eleme, a következő sorba azokat, amelyekben sárga az alsó elem, a harmadik sorba pedig a kékkel kezdődőket. Mindegyik sorban három oszlopot képezünk: az első oszlopba tesszük azokat, amelyeknek a közepén piros elem van, a másodikba azokat, amelyeknek a közepe sárga, a harmadik oszlopba azokat, amelyeknek a közepe kék. Végül az oszlopokban mindenütt a felső elemnek a piros, sárga, kék sorrendjét őrizzük meg. (A rajzokat itt a kezdőbetűk helyettesítik:)

	középen piros			középen sárga			középen kék		
fent:	piros	sárga	kék	piros	sárga	kék	piros	sárga	kék
alul piros	p	s	k	p	s	k	p	s	k
	p	p	p	s	s	s	k	k	k
	p	p	p	p	p	p	p	p	p
alul sárga	p	s	k	p	s	k	p	s	k
	p	p	p	s	s	s	k	k	k
	s	s	s	s	s	s	s	s	s
alul kék	p	s	k	p	s	k	p	s	k
	p	p	p	s	s	s	k	k	k
	k	k	k	k	k	k	k	k	k

A fa-diagram és a táblázat használatára célszerű megtanítani a gyerekeket. Ennek legjobb módja, ha erősítjük azokat a próbálkozásait, amelyekben felismerhetők ilyen elemek, s lehetőleg nem adunk kész eszközt a kezükbe. (Pl. kérhetjük az egyes esetekben, hogy próbálkozzanak még szebb rendet kialakítani; kérhetjük egy-egy jól sikerült részletnél, hogy mondják el, ott hogyan rendezték a tornyokat, ezzel segíthetjük az alakuló rend tudatosítását.)

2. Gyakoroljátok a számok írását! – mondta a tanító néni. – Az 5-ös, 2-es és 7-es számjegyekből alkossatok 3 jegyű számokat! Írjátok le az összes különbözőt!

A feladat természetesen nem lehet elsős tennivaló. Harmadikban kérhetjük az összes lehetőség összegyűjtését, pl. csoportonként, közös munkával. (Ebben az életkorban is lehet cé-

lunk az írás külsejének szebbítése.) Figyeljünk arra, hogy a gyerekeknek eleinte még nem az a kérdés a fontos, hogy hányféle lehetőség van, hanem maguknak a lehetőségeknek a megkeresése érdekes. Az alkotás közben való rendezgetés céljából helyes külön-külön kártyákra íratni az egyes háromjegyű számokat. Osszák meg maguk között a gyerekek a tennivalókat egy-egy csoporton belül; maga a tennivaló megszervezése már megkívánja a feladat valamilyen szintű átlátását.

Annak ellenőrzését is hagyjuk növendékeinkre, hogy csupa különbözőt írtak-e, és hogy megtalálták-e az összest. Ismét a számkártyák elrendezése lehet az ellenőrzés jó eszköze.

Ha felismerték a feladatban az első feladat „szerkezetét”, akkor már nagy lépést tettek az általánosítás felé.

Feladat: Alkosson más, pontosan ugyanilyen szerkezetű feladatot! Fogalmazza meg pontosan, mi a közös ezekben a feladatokban!

Gondolkozzon a következő feladatokon! Próbálkozzon az összes lehetőség megalkotásával, áttekintésével, és alkosson rendet, amely segíti annak eldöntését, vajon megtalálta-e az összest! (Némelyik feladat megoldására visszatérünk a későbbiekben.)

3. Három egyenlő széles, színes papírcsíkból ragasztunk össze három-csíkos zászlókat. Szeretnénk olyanokat készíteni piros, fehér és zöld színnel, amelyen két szomszédos csík nem lesz azonos színű. Milyen zászlók készíthetők?

4. Hány négyjegyű szám van?

5. Hány négyjegyű szám van a hármas számrendszerben?

6. Egy piros és egy kék szabályos dobókockával dobok. A piros kocka minden pöttye tízet ér, a kéken levő pöttyök értéke 1. Milyen számokat dobhatok a két kockával?

7. Feldobunk 5 különböző pénzérmét: egy-egy 1, 2, 5, 10 és 20 forintost. Csak azokat az érmekeket számítjuk, amelyeken az „írás” van felül. Hányféle értéket dobhatunk?

8. Tíz gyerek futóversenyt rendez. Hányféle sorrendben érhetnek célba, ha nincs azonos futásidő?

Például e legutóbbi feladat átvezethet a kombinatorikus gondolkodás következő lépésfokára. Több más lehetőség is volna, de ezzel kapcsolatban célszerű megbeszélni azt a gondolkodási módszert, ami a kombinatorikában (is!) igen sokszor alkalmazható haszonnal. Azt ugyanis, hogy **ha egy probléma túlságosan bonyolult vagy túl sok áttekinthetetlen lehetőséget sejtet, akkor oldjunk meg helyette előbb valami egyszerűbbet, oldjuk meg kisebb számok körében.**

2. Adott feltételnek megfelelő lehetséges objektumok számának keresése már megoldott problémákkal azonos szerkezetű példákban

1. Visszavezetés egyszerűbb esetekre: egy adat rendszeres változtatása sejtés megfogalmazása a kiterjeszthezősége, általánosításra; igazolás.
2. Egy-egy egyszerű összefüggés általános megfogalmazása képlettel.

Új típusú problémák; összeszámlálás „összeadó” esetek számbevételével

1. Hányféle sorrendben érkezhetnek be a versenyzők, ha tízen mérték össze gyorsaságukat futásban? (Az elmúlt órán felvetett probléma megoldása.)

A tíz gyerekek már nevet adni is nehézkes! Nézzük meg, mi a helyzet, ha csak 2, 3, 4, 5 ... gyerek vesz részt a versenyen! Hátha megsejthetünk valamilyen rendet!

Jelöljük a gyerekeket az ABC betűivel, és soroljuk a lehetőségeket.

A résztvevők száma:	A lehetséges sorrendek	A lehetőségek száma
2	AB, BA	2
3	ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA	6
4	ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB, BACD, BADC, BCAD, BCDA, BDAC, BDCA, CABD, CADB, CBAD, CBDA, CDAB, CDBA, DABC, DACB, DBAC, DBCA, DCAB, DCBA	24
5		?

Vajon hogyan alakul a lehetőségek száma tovább? Van-e valamilyen felismerhető szabályosság az eddig leírt számok sorozatában: 2, 6, 24; sőt, ha az 1 „versenyző” esetében is megállapítjuk, hogy egyetlen beérkezési „sorrend” van, akkor: 1, 2, 6, 24...?

Hogyan folytatható ez a számsorozat? Mindenesetre – mint bármely sorozat, ez is – többféleképpen. Azonban **a felvetett probléma megoldását csak egyféle sorozat számai jelenthetik.**

Pl. folytatható az 1, 2, 6, 24 ... sorozat úgy, hogy most újra 2-vel szorozzuk az előző számot, tehát a 24 után a 48 következik, aztán ezt 3-mal kell szorozni, a következő számot 4-gyel, s újra 2-vel, 3-mal, 4-gyel ... Ennek megfelelően a sorozat első néhány eleme: 1, 2, 6, 24, 48, 144, 576, 1152, 3456, 13824... (Lehet, hogy a tíz versenyző ilyen sokféle sorrendben érkezhet célba? Lehet, hogy ezek a számok jelentik a probléma megoldását 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 versenyző esetére?)

Észrevehetjük, hogy a $2 = 1 \cdot 2$, a $6 = 2 \cdot 3$, a $24 = 6 \cdot 4$. Eszerint úgy is folytatható az elkezdett sorozat, hogy mindegyik tagot a következő természetes számmal szorozzuk meg. Ennek a szabályosságnak a folytatásaképpen a sorozat következő számának az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ -at, az azután következőnek az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ -at fogadjuk el, aztán következnek az 5040, 40320, 362880, 3628800... (Ez még többféle sorrend lenne; pedig már az előbbi is elképzelhetetlenül soknak tűnt! Lehet, hogy mégis ezek lesznek a jó számok?)

Folytatható a fenti négy elem olyan sorozat-szabály szerint is, ha felismerjük a különbség-sorozat valamilyen rendjét. Pl. $1 + 1 = 2$, $2 + 4 = 6$, $6 + 18 = 24$, s a különbségeket képezzük úgy, hogy az előző különbség ötszöröséből vesszük el a soron következő természetes számot:

1 , $1 \cdot 5 - 1 = 4$, $4 \cdot 5 - 2 = 18$, $18 \cdot 5 - 3 = 87$, $87 \cdot 5 - 4 = 431$..., és az elkezdett sorozat számai így alakulnak:

1	2	6	24	111	542	2692	13536	67149	335706
	1	4	18	87	431	2150	10744	53713	268557 ...

De akár úgy is sorozatot kapnánk, hogy a 24 után már csak a 24 állna minden helyen:

1, 2, 6, 24, 24, 24, ... – erről azonban erősen gyanítjuk, hogy nem felel meg a felvetett problémának.

Vajon **hogyan lehetne eldönteni, hogy melyik sorozat írja le a fenti probléma megoldását?** Melyik, a számok sorozatában felismert szabályosság adja meg a beérkezési sorrendek számainak sorozatát? Egyik sem? Egy ezektől különböző?

Ezt csak úgy állapíthatjuk meg, ha a sorozat képzési szabályát magából a lehetőségek alakulásából magyarázzuk.

Például gondolkodhatunk így: 2 gyerek csak 2-féle sorrendben érkezhet be: az A ér be előbb, vagy a B. Jöjjön most a harmadik versenyző! C a beérkezési sorrendben mindenképpen 3 helyet foglalhat el: akkor is, ha A megelőzi B-t, akkor is, ha B előzi meg A-t:

	<i>C az első</i>	<i>C a második</i>	<i>C a harmadik</i>
<i>A megelőzi B-t</i>	CAB	ACB	ABC
<i>B megelőzi A-t</i>	CBA	BCA	BAC

Nemcsak azt látjuk így, hogy valóban 6-féle sorrend lehetséges, hanem azt is, hogy a harmadik versenyző belépése megháromszorozta a lehetőségek számát.

Gondoljuk tovább a lehetőségeket! Ha 3 versenyző sorrendje egymáshoz képest 6-féle lehet, akkor a negyedik versenyző beállítása négyszerezzi a lehetőségek számát. Hiszen a másik három versenyző sorrendjétől függetlenül 4 különböző helyen érkezhet: első, második, harmadik vagy negyedik lesz a versenyben. A fentihez hasonló táblázatot most úgy alkotjuk meg, hogy soronként megőrizzük az A, B, C versenyzők egyféle sorrendjét, miközben D elfoglalja rendre mind a négy helyet:

<i>A, B, C sorrendjei:</i>	<i>D az első</i>	<i>D a második</i>	<i>D a harmadik</i>	<i>D a negyedik</i>
<i>ABC</i>	DABC	ADBC	ABDC	ABCD
<i>ACB</i>	DACB	ADCB	ACDB	ACBD
<i>BAC</i>	DBAC	BDAC	BADC	BACD
<i>BCA</i>	DBCA	BDCA	BCDA	BCAD
<i>CAB</i>	DCAB	CDAB	CADB	CABD
<i>CBA</i>	DCBA	CDBA	CBDA	CBAD

Bizonyítás nélkül mondjuk ki, hogy „jól láthatóan” ötszörözi a lehetőségek számát az, ha az előbbi négy versenyzőhöz még egy futó beáll, hatszor annyi lesz a lehetőségek száma 6 versenyző esetén, mint 5 versenyzőnél... Ez a lépésenként való építkezés mutatja meg, hogy a futóverseny problémáját a 2. sorozat írja le, s az általános bizonyításnak is ez az alapja¹.

Tíz versenyző beérkezési sorrendje tehát: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 10!$ lehet. Röviden $10!$ jelöli és „10 faktoriális”-nak mondjuk azt a szorzatot, amelyben 1-gyel kezdődően 10-ig minden természetes számot szorzunk össze. $1! = 1$; $2! = 1 \cdot 2 = 2$; $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$; $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$; $5! = 120$...

*Érdemes egy **másik gondolatmenet** szerint is végiggondolni a lehetőségek számát; van akinek ez az egyszerűbb.*

Bármelyikük lehet első a tíz közül. Akárki lett az első, utána 9 futó közül kerül ki a második. Annak tehát $10 \cdot 9$ féle lehetősége van, hogy ki az első és a második. Mind a 90 esetben 8 futó közül lesz egy a harmadik, aztán a $10 \cdot 9 \cdot 8$ féle eset mindegyike 7-féleképpen folytatódhat aszerint, hogy ki a negyedik ... a végén 2 futó közül lesz az egyik a kilencedik és 1 marad tizediknek. Természetesen így is $10!$ a lehetőségek száma.)

2. Háromféle színű (piros, sárga, kék) lego-elemekből építsünk tornyokat! Hányféle tornyot lehet készíteni?

Az eső alkalommal már megoldottuk a feladatot a 3 szintes tornyok esetére. Azt találtuk, hogy 27 különböző torony készíthető.

Most azonban nem adja meg a feladat az egymásra építhető elemek számát; a felleves tehát úgy értendő, hogy kicsit általánosabban szeretnénk tudni: hányféle lehetőség van, ha 1, 2, 3, 4, 5... szintesek a tornyok. Hányféle a lehetőség, ha akármekkora adott szám a szintek száma.

Ismét gyűjtsük táblázatba a változó szintek számát, a felsorolt lehetőségeket és ezek számát!

Szintek	A lehetséges tornyok									A tornyok száma
1	p,			s,			k			3
2	pp,	ps,	pk,	sp,	ss,	sk,	kp,	ks,	kk	9
3	ppp,	pps,	ppk,	psp,	pss,	psk,	pkp,	pks,	pkk,	27
	spp,	sps,	spk,	ssp,	sss,	ssk,	skp,	sks,	skk,	
	kpp,	kps,	kpk,	ksp,	kss,	ksk,	kkp,	kks,	kkk	
4										?

A 3, 9, 27 számok leginkább a háromszorozódást juttatják az eszünkbe. A 81, 243, 729... folytatást azonban csak akkor fogadhatjuk el, ha nemcsak a számok között találjuk ezt a szabályosságot természetesnek, hanem **magában a problémában leljük meg az okát.**

¹ A bizonyítást a teljes indukcióval lehet elvégezni, amelynek alapja az a Peano-axióma, mely szerint ha a természetes számok körében érvényes valamely tulajdonság az első természetes számokra, és ez minden természetes számról öröklődik a rákövetkező természetes számra, akkor érvényes minden természetes számra. A fenti leírásban az „öröklődést” mutattuk meg kis számok körében.

Amikor 1 szintes a „torony”, akkor természetesen háromféle lehetőségünk van: a 3 szín adja ezt.

Hogyan folytatódik az építkezés? Vegyük kézbe a piros egy szintes „tornyot”, és ezt építsük tovább! Megtehetjük, hogy másodiknak piros elemet választunk, azt, hogy sárgát, vagy azt, hogy kék elemet teszünk az első szintre. Hasonlóan háromféle elemet tehetünk a sárga elemre, és háromfelét a kék elemre. Így valóban természetes, hogy 3-szor annyi 2 szintes tornyot építhetünk, mint ahány 1 szintest.

Hogyan épülnek a 3 szintes tornyok? Úgy, hogy a 2 szintesekre teszünk még egy elemet. A harmadik elem megválasztására szintén 3 féle lehetőségünk van, ez azt jelenti, hogy mindegyik 2 szintesből – a felső elem színe szerint – 3 féle 3 szintes torony lesz. Jól érezzük, hogy bármilyen magas toronyból 3-szor annyiféle építhető, mint ahányféle eggyel alacsonyabb, s így a számsorozat fent megsejtett szabályosságát maga az építkezésben található rend magyarázza.

A 4 szintes tornyok száma tehát $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$;

az 5 szinteseké $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$;

a 6 szinteseké $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 729$ stb.

az n szintes tornyok száma pedig $3 \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 3}_{n \text{ darab}} = 3^n$

3. Hány négyjegyű szám van?

Gondolkodhatunk pl. így:

Egyjegyű számból 10 darab van: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

100-nál kisebb – azaz legfeljebb kétjegyű – szám 100 darab van: 0, 1, ... 99. Ebből a 100 számból 10 egyjegyű, a többi ($100 - 10 =$) 90 a kétjegyű.

1000-nél kisebb – legfeljebb háromjegyű – szám 1000 darab van. Ha ezekből elhagyjuk a legfeljebb kétjegyűek (azaz az egyjegyűek és a kétjegyűek) számát, akkor megkapjuk a pontosan háromjegyűek számát: $1000 - 100 = 900$.

A legfeljebb négyjegyűek számából, 10000-ből elvéve a legfeljebb háromjegyűek számát, a pontosan négyjegyűek számához jutunk: $10000 - 1000 = 9000$.

A négyjegyű számokat összeszámolhatjuk úgy is, hogy elgondoljuk: az első helyre írhatjuk az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 bármelyikét; akármelyik számjegy után 10 különféle számjegyet írhatunk:

10., 11., 12., 13., 14., 15., 16., 17., 18., 19.;

20., 21., 22., 23., 24., ... 29.;

...

90., 91., 92., ... 99.;

Mind a 90 esetben a harmadik helyre 10 különféle számjegy kerülhet:

100., 101., 102., ... 109.;

110., 111., 112., ... 119.;

...

200., ...

...

999., ... 999.;

Végül a negyedik helyet is 10-féleképpen tölthetjük ki mind a 900 esetben.

Ha most azt a kérdést vetjük fel, hogy hány olyan szám van, amely jegyeinek száma n , a fenti gondolatot folytatva $9 \cdot 10^{(n-1)}$ lehetőséget találunk.

4. Hány négyjegyű szám van a hármas számrendszerben?

Miben különbözik a hármas számrendszerben felírható szám a tízes számrendszer számjeleitől? Abban, hogy egy-egy helyre csak 3-féle számjegy írható: 0, 1, vagy 2, az első helyre pedig 2-féle: 1 vagy 2.

Tehát $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 54$ féle négyjegyű szám írható a hármas számrendszerben:

1000	1001	1002	1010	1011	1012	1020	1021	1022
1100	1101	1102	1110	1111	1112	1120	1121	1122
1200	1201	1202	1210	1211	1212	1220	1221	1222
2000	2001	2002	2010	2011	2012	2020	2021	2022
2100	2101	2102	2110	2111	2112	2120	2121	2122
2200	2201	2202	2210	2211	2212	2220	2221	2222

Az eddig elemzett feladatok megoldásában közös volt, hogy miközben egy-egy elemmel továbbépítkeztünk (eggyel több sorszámú helyezést is számon tartunk, egy-egy magasabbra építjük a tornyot, egy-egy többjegyű számot alkotunk...) a lehetőségek száma többszöröződik. Ez kifejeződik például a már megismert fadiagramon úgy, hogy az utolsó ágvégződések újból szétágaznak, mégpedig mindegyik ugyanannyi felé.

Feladat: Készítse el a fent elemzett feladatokhoz a megfelelő fa-diagramot! (A szerkezetét adja meg, ahol túlságosan sok ágat kellene megrajzolni!)

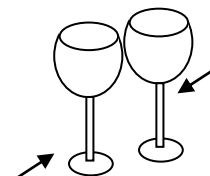
5. Egy névnapon nyolc barát ünnepel. A köszöntés során mindenki koccint mindenkiel. Hány koccintás történik?

Feladat: Próbálják el a koccintást egymás között! Tartsanak valamilyen rendet, hogy egy se maradjon ki, egy se ismétlődjön! Miközben 8 társuk lejátssza, minden résztvevő számolja, hogy ő hányszor koccintott, a többiek pedig próbálják számolni az összes koccintás számát!

Ha elvégezték az esetek összegyűjtését, követhették például azt a rendet, hogy először egyikük sorra koccintott mind a 7 „barátjával”, aztán a helyére ment. A következő hallgatónak további 6 társával kellett koccintania (hiszen az elsővel való koccintást már számolták). Miután a második hallgató is helyre ment, a harmadiknak már csak 5 koccintás volt hátra és így tovább. Ennek megfelelően $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$ -nak adódik a koccintások száma.

Kérdezzük meg mindegyik hallgatótól, hogy ő hányszor koccintott! Hibátlan számítás esetén mindenki azt állítja, hogy 7-szer – hiszen mindenkiel kellett egyszer koccintania. Ez pedig $7 \cdot 8 = 56$.

Melyik szám az igazság? 28, vagy 56 koccintás volt?



Felismerhetjük, hogy ha mindenki megszámolta az ő poharának csendülését, akkor minden koccintást kétszer vettünk számba: egyszer az egyik, egyszer a másik pohár koccanását a másikkal – pedig ez csak egy összeccsendülés. Így a koccanások száma nem 56, hanem ennek a fele: 28.

6. Ebben a táblázatban mindegyik betűtől csak a szomszédos mezőre szabad lépni jobbra vagy lefelé. Olvassa ki a BARÁTSÁG szót, ahányféleképpen csak lehet!

B	A	R	Á	T
A	R	Á	T	S
R	Á	T	S	Á
Á	T	S	Á	G

Próbálja meg leírni egy-egy $5 \cdot 4$ -es táblázatba külön-külön a kiolvasásokat! Biztosabban tudja összegyűjteni a lehetőségeket, ha kitalál valamilyen rendet. Például elhatározhatja, hogy mindig előnyben részesíti a jobbra lépést a lefelé lépéssel szemben:

B	A	R	Á	T
				S
				Á
				G

B	A	R	Á	
			T	S
				Á
				G

B	A	R	Á	
			T	
			S	Á
				G

B	A	R	Á	
			T	
			S	
			Á	G

Folytassa a gyűjtést az elkezdett rendnek megfelelően!

Azt is megteheti, hogy a mezőket pontokkal helyettesíti, s a kiolvasást csak az útvonallal jelöli:

■	■	■	■	■
■	■	■	■	■
■	■	■	■	■
■	■	■	■	■

■	■	■	■	■
■	■	■	■	■
■	■	■	■	■
■	■	■	■	■

■	■	■	■	■
■	■	■	■	■
■	■	■	■	■
■	■	■	■	■

■	■	■	■	■
■	■	■	■	■
■	■	■	■	■
■	■	■	■	■

Folytassa a rajzolást a kezdett rend szerint! Vegye észre benne az absztrahálás első lépését: ahol a beírt betűktől elvonatkoztatva már csak a lépések iránya lesz a fontos!

Újabb absztrakciót jelenthet, ha a lépéseknek megfelelően kis nyilakkal adjuk meg a szomszédos mezőre lépések irányát, vagy ha a négy jobbra lépés 4 „j” betűjét és a három lefelé lépés 3 „l” betűjét jegyezzük fel egy-egy leolvasásnak megfelelően:

→→→→↓↓↓, →→→→↓↓↓↓, →→→→↓→↓↓↓, →→→→↓↓↓→,

jjjjlll;

jjjljl,

jjjlljl,

jjjlllj, ...

Feleltesse meg a leolvasásoknak, rajzoknak ezeket a 7 nyílból, 7 betűjelből álló csoportokat a saját gyűjtésében is!

Ismét más jegyzési formát ad az, ha pl. csak azokat a sorszámokat írjuk fel, ahányadik lépésben jobbra lépünk a hét lépés közül. (Vagy ha a lefelé lépések sorszámait írjuk fel.)

Jobbra lépések az egyes kiolvasásokban:

1234, 1235, 1236, 1237, ...

Lefelé lépések az egyes kiolvasásokban:

567, 467, 457, 456, ...

Gyakorolja ezt a jegyzési módot is a többi leolvasás átkódolásával!

Próbálja gondolkodását elemezni abból a szempontból, hogy benne melyik jegyzési mód felel meg legjobban a probléma leírásának, átlátásának! Melyikben érzi legbiztonságosabbnak, hogy csak különböző lehetőségeket gyűjtött és mindegyiket megtalálta? Milyen más szempont szerint választaná az egyik vagy másik lejegyzési módot?

Most már tegyük fel a kombinatorikus kérdést: hányféle leolvasás lehetséges?

Az első két jegyzési mód alapján gondoljuk meg lépésenként, hogy **az egyes mezőkbe (az egyes pontokhoz) hányféle úton juthatunk!** Írjuk be a mezőkbe ezeket a számokat!

Az első sor mezőibe csak balról érkezhetünk, az első oszlop mezőibe csak fentről:

1	1	1	1	1
1				
1				
1				

A második sortól és oszloptól kezdve egy-egy mezőbe fentről is léphetünk és balról is. Tehát ahányféleképpen eljutottunk a felette álló mezőbe, annyiféleképpen jutunk a kiszemelt helyre úgy, hogy az utolsó lépésünk lefelé lépés, és ahányféleképpen eljutottunk a bal oldali mezőbe, annyiféleképpen érünk a kiszemelt helyre úgy, hogy az utolsó lépés jobbra lépés:

1	1	1	1	1
1	2	3	4	5
1	3			
1	4			

1	1	1	1	1
1	2	3	4	5
1	3	6	10	15
1	4	10		

1	1	1	1	1
1	2	3	4	5
1	3	6	10	15
1	4	10	20	35

Ellenőrizze megoldásait: megtalálta-e a 35 különböző leolvasást mindegyik jegyzési mód szerint!

Más-más jegyzési módok egyben más-más módon vetik fel a kérdést.

A nyilakkal illetve betűjelekkel való jegyzésben négy egyforma és három ezektől különböző, de szintén egyforma jelből álló sorozatokat írtunk, és arra lehetünk kíváncsiak, hogy hányféle ilyen 7 elemű sorozatot lehet alkotni. Mintha 4 piros és 3 sárga lego-elemből építenénk tornyokat, és a színek sorrendje szerint megkülönböztetve őket, a tornyok lehetséges számát kérdeznénk.

Az utolsó két jegyzésmód pedig annak meggondolását kívánja, hogy 7 hely közül hányféleképpen választhatjuk meg azt a négyet, ahova a j betűt írjuk, illetve hányféleképpen választhatjuk meg azt a hármat, ahova az l betűt tesszük.

E két felvetésre később fogunk visszatérni.

3. Összeszámlálások „kerülő úton”

1. Esetek összefogása egy esetté az elemek megkülönböztethetlensége miatt
2. A sorrend lényegtelenné válása

1. Öt különböző színű gyöngyszemből hányféle gyöngysor fűzhető?

A feladat megoldását ismét célszerű úgy elkezdni, hogy megalkotjuk az első gyöngysorokat. Gondolkodásunkat segítheti, ha kezdettől próbálunk valamilyen rendet tartani alkotásunkban.

Legyenek a színek p, s, k, z, f.

A fűzés rendje lehet az, hogy az első gyöngyszemeket mindaddig nem változtatjuk, amíg a folytatás még lehet új. Pl. az első két sorban megegyezik az első három szín, csak a 4. és 5. cserélődik föl. Az első 6 sorban megőriztük az első két színt, hiszen utána az 3. 4. és 5. gyöngyszem hatféle sorrendben fűzhető:

pskzf
pskfb
pszkf
pszfk
psfkz
psfkz

Olyan új gyöngysort már nem tudunk fűzni, amelyben az első két szín változatlan, hiszen mögöttük az utolsó három csak hatféle sorrendben állhat egymáshoz képest. Most változtassuk meg a második gyöngyöt úgy, hogy az első maradjon a helyén, azaz a s helyére a k vagy z vagy f kerüljön. Nyilvánvalónak érezzük, hogy ha 6-féle lehetőség volt az utolsó három gyöngyszem sorrendjére akkor, amikor a s állt előttük a 2. helyen, akkor 6-féle sorrendben állhat az utolsó három gyöngyszem akkor is, ha a k a 2. akkor is, ha a 2. helyre a z kerül és akkor is, ha a 2. helyre az f-et tesszük. Így lesz négyszer annyi sorrend, amikor az utolsó 4 helyet vizsgáljuk, mint amikor csak az utolsó 3 helyen álló gyöngyszemek sorrendjeire figyelünk.

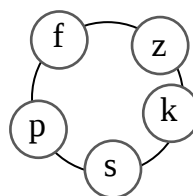
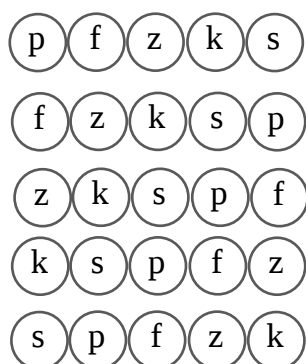
Feladat: Folytassa az érvelést!

Úgy is megtaláljuk a lehetőségek számát, ha azt gondoljuk meg, hogy fűzés során hányféle lehetőségünk van egy-egy gyöngyszem megválasztására. Amikor az első gyöngyszemet fűzzük fel, akkor 5 szín között választhatunk. Bármelyiket fűztük fel elsőnek, minden egyes esetben 4 szín között választhatunk a második gyöngyszemnél. Az első két szem felfűzésére tehát $5 \cdot 4$ lehetőség van.

Az első két gyöngyszemet 20-féleképpen választhatjuk meg. Bármelyik kettő után a megmaradó 3 közül választhatjuk meg a következőt, tehát az első hármat $5 \cdot 4 \cdot 3$ -féleképpen fűzhetjük fel. Hasonlóan továbbgondolva a lehetőségek szaporodását egy-egy új gyöngyszem felfűzésekor, az adódik, hogy az 5 szemet $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ ($= 5!$) féle sorrendben lehet felfűzni.

Vajon ha ezeket a gyöngysorokat kézbe vesszük, **ez mind különböző lett?** A valóságos gyöngysorok nem különböztethetők meg azoktól, amelyeken éppen fordított sorban fűztük a szemeket! Tehát fele ennyiféle gyöngysor van valójában: 60.

És ha összekötjük a zsineg két végét úgy, hogy a szálon körbefuthatnak a szemek? Akkor ismét lesznek olyan gyöngysorok, amik összekötés után már megkülönböztethetetlenekké válnak. Például ezek a gyöngysorok mind ugyanolyan láncá kapcsolhatók össze:



Ezek a sorok ugyanis mind létrejöhetnének a láncból, ha azt más-más helyen nyitnánk szét. Éppen 5 helyen lehet szétnyitni: az öt gyöngyszem bármelyike után. Egy másik láncból – ahol tehát nem mindegyik gyöngyszemnek ugyanazok a szomszédai, mint ezen az előbb megalkotott láncon – ismét 5 különböző gyöngysort kapnánk, ha más-más helyen nyitnánk szét. Ezért ötöd annyi lánc lesz, mint ahány gyöngysor volt, tehát $60 / 5 = 12$ -féle lánc fűzhető az 5 gyöngyszemből.

2. Öt gyöngyszemből hányféle gyöngysor fűzhető, ha ezek közül 3 piros, a másik kettő pedig: f és s?

Elkezdhetjük ismét a gyöngysorok felfűzését:

pppfs, pppsf, ppfps, ppfsp, ppspf, ppsfp,
psppf, pspfp, psfpp,
pfpps, pfpfp, pfspp,
fppps, fppsp, fpspp,
fsppp,
spppf, sppfp, spfpp,
sfppp,

Bár követtük az első feladatban megszabott rendet: addig nem változtatunk a gyöngysor elején, amíg be tudjuk fejezni a fűzést az előzőektől különböző módon, sokkal egyenetlenebbek a lehetőségeink. Egy sorba írtuk azokat a gyöngysorokat, amelyeknél az első két szemet nem változtattuk, és látjuk, hogy ilyenből egy esetben hat sor van, némely esetben három, és kétféle kezdésnél egy, egy. Ennek oka világos: ha az

első két gyöngyszem után három különböző marad, ezeket hatféle sorrendben fűzhetjük. Ha két azonos színű és egy tőlük különböző az utolsó három szem, akkor ezeknek már csak 3 különféle sorrendje lehetséges. Ha pedig mindhárom gyöngyszem azonos színű, akkor csak egyetlen sorrend van.

Mégis kényelmetlenné teszi az esetek átlátását a lehetőségek számának ez a „szabálytalansága”.

Gondolkodjunk most másképpen.

Amikor mind az öt gyöngy színe különböző volt, akkor 120-féle sorrendben állhattak egymás után. Maguk a gyöngyszemek most is állhatnak 120-féle sorrendben, csak éppen nem tudjuk megkülönböztetni a pirosakat egymástól. Például ha háromféle jelet adnánk a pirosoknak, akkor ez jól láthatóvá válna: pl. az egyiket vastag betűvel, a másikat naggyal, a harmadikat kicsi aláhúzott betűvel jelöljük

p **P** p f s
p p **P** f s
P p **p** f s

Most nézzük meg azt, hogy az 5 megkülönböztetett szemből álló gyöngysorok közül melyek válnak megkülönböztethetetlenekké. Azok, amelyekben a három piros cserél helyet. Bárhol áll a három piros, amíg valahogyan megkülönböztetjük a szemeket, egymás között mindig 6-féle sorrendet alkothatnak. Például a fenti három eset mindegyikében az első, második és harmadik helyen áll a piros, s bár maguk között helyet cseréltek, jelzés nélkül ugyanolyan gyöngysornak látjuk őket. Ezeken kívül is van még 3 sorrendje a három pirosnak:

P **p** p f s
p **p** **P** f s
p **P** **p** f s

Így tehát ebből a 6 gyöngysorból most egyetlen eset lesz: elől a 3 p, aztán a f, végül a s.

Ha nem az első három helyre fűzzük a három pirosat, hanem pl. az 1., 3. és 4. helyre, akkor is egymáshoz képest 6 féle sorrendben következhetnek:

p	s	P	<u>p</u>	f
p	s	<u>p</u>	P	f
P	s	p	<u>p</u>	f
P	s	<u>p</u>	p	f
<u>p</u>	s	p	P	f
<u>p</u>	s	P	p	f

Ez a hat eset ismét egyetlen sorrendnek fog látszani, amikor nem jelöljük meg az azonos színűeket.

Hasonlóan végiggondolhatjuk, hogy minden olyan hat-hat eset most egyetlen esetté zsugorodik, amelyben a s és f nem hagyja el a helyét, csak a pirosak sorrendje változik. 3 gyöngyszem egymáshoz képest $3! = 6$ féle sorrendben állhat, ezért a fenti 120 sorrendből $120 / 6 = 20$ sorrend lesz.

3. Ha csak 2 piros gyöngyszem van, a másik három pedig f, s, k,

akkor 2-2 gyöngysor válik a 120-ból megkülönböztethetlenné: azok, amelyekben a másik három gyöngyszem a helyén marad, és csak a két piros cserélődik. A lehetséges sorrendek száma: $120/2$

4. Ha 2 piros, 2 zöld és 1 sárga gyöngyszem van,

akkor miközben a 2 piros és a sárga a helyén marad, a 2 zöld 2-féle sorrendben helyezkedhet el egymáshoz képest, aztán ha a 2 pirost megcseréljük és a sárga szintén ugyanott marad, a 2 zöld ismét kétféle sorrendben állhat. Ezt a 2-szer 2 esetet nem tudjuk megkülönböztetni. Így a 120 sorrendből $120 / 4 = 30$ különböző sorrend lesz.

Jegyezzük meg, hogy a 2., 3. és 4. feladatban ismét megfigyelődik az esetek száma, ha azt is figyelembe vesszük, hogy kézbe véve egy-egy gyöngysort, ezt és a fordított sorrendet nem lehet megkülönböztetni. Ha pedig körláncot kötünk a gyöngysorokból, akkor 5-5 gyöngysor lesz megkülönböztethetetlen, így ötöd annyi lánc lesz fűzhető, mint a kézbe vehető gyöngysorok száma.

5. Hányféle gyöngysor készíthető 7 különböző szemből, 3 piros és 4 tőle és egymástól is különböző színűből, 4 sárga és 3 tőle és egymástól is különböző színűből, 3 pirosból, 3 sárgából és 1 zöldből?

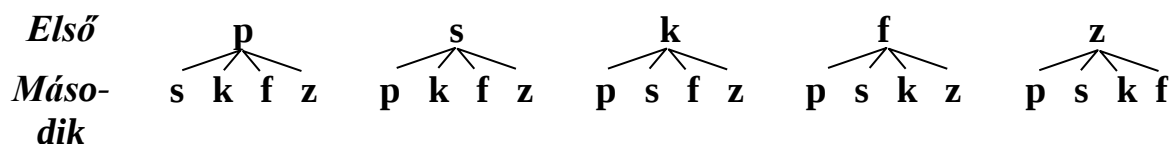
Feladat: Dolgozza ki az 5. feladat problémáit!

6. Egy dobozban **5 golyó** van: egy-egy piros, sárga, kék, fehér és zöld. Belenyúlunk csukott szemmel, és **egyszerre kiveszünk közülük hármat**. Mi lehet a kezünkben? Hányféle eset lehetséges?

Feladat: Próbálja megbecsülni előre, hányféle lehetőség van! A becslés után gyűjtse össze a lehetőségeket! Tartson valamilyen rendet az esetek felsorolásában! (Esetleg utólag alakítson ki rendet, ha már úgy gondolja, hogy megtalálta az összest!)

A tapasztalatszerzést jelentő összeírás és rendezés után ismét alkossunk egy új összeszámlálási módszert.

Ha egymás után húznánk ki a golyókat, akkor viszonylag könnyen átlátnánk a lehetőségeinket. Elsőként még bármelyik golyó a kezünkbe kerülhet, ez **5-féle lehetőség**. Amikor egy már a kezünkben van, akkor a másodikat csak **4 közül húzzuk**:



Az első két húzás tehát $5 \cdot 4 = 20$ féle lehet.

A harmadik golyó a maradék három egyike lehet, ez megháromszorozza a lehetőségeket. Egyenként húzva, a sorrendet is lényegesnek tartva $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ féleképpen húzhatunk az 5 golyó közül hármat.

Minthogy azonban **feladatunkban egyszerre markoljuk ki a három golyót**, köztük nem állapítunk meg semmiféle sorrendet. **Bármelyik három került a kezünkbe, ezeket egymás után húzva $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ féle sorrendben vehetnénk.** Ez pedig azt jelenti, hogy hatszor annyi lehetőségünk van, amikor fontosnak tartjuk a golyók sorrendjét is, mint amikor egyszerre húzzuk a három golyót. Másképpen fogalmazva: **feladatunk feltétele szerint hatod annyi a lehetőségünk, mint az egyesével, egymás után való húzásban.**

Összefogva a számolásunkat a lehetőségek száma:

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$$

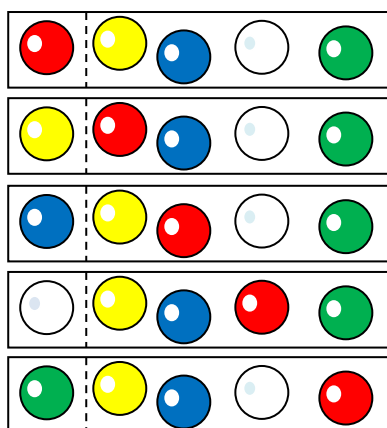
7. Vajon 4 golyót többféleképpen lehet kivenni egyszerre az öt közül, vagy kevesebb-féleképpen? Hát kettőt? Egyet? Ötöt?

Feladat: Végezzon először becslést, és csak aztán kezdjen hozzá a rendszerezett átgondoláshoz!

Legkönnyebben arra válaszolhatunk, hogy **5 közül ötöt egyféleképpen vehetünk kézbe**: úgy, hogy kimarkoljuk mind, éppen ezt az öt golyót.

Azt is könnyű eldönteni, hogy **egyet ötféleképpen vehetünk**: úgy, hogy a piros lesz a kezünkben, úgy, hogy a sárga, úgy, hogy a kék, a fehér illetve a zöld lesz egyedül a kezünkben.

Játsszuk le most úgy a húzásokat, hogy egyszerre ketten húznak: az *A* résztvevő egyet, a *B* pedig 4-et vehet a kezébe! Amikor *A* a kezébe veszi a piros golyót, akkor *B* vegye ki a többi: a sárga, fehér, kék és zöld golyót. Ha *B* kiválaszt valamilyen négyest, akkor *A* elégedjen meg a dobozban hagyott eggyel. *B*-nek könnyebb összegyűjtenie a lehetőségeket úgy, ha azt figyeli, mit húz *A*, azaz melyik golyót hagyta bent a dobozban. Ha a kihúzás helyett arról gondolkodnánk, hogy hányféleképpen lehet az 5 golyót $1 + 4$ -re szétválasztani, még jobban éreznénk, hogy **annyiféleképpen lehet 4-et kiválasztani, ahányféleképpen 1-et.**



Alkalmazhatjuk a 6. feladatban követett gondolkodásmódot:

Amikor sorban, egyenként húzunk, akkor az elsőt 5-féleképpen választhatjuk meg, hozzá a másodikat 4-féleképpen, a harmadikat 3-, a negyediket 2-féleképpen. Ez tehát $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ féle lehetőség. Bármelyik 4 golyó $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ féle sorrendben

kerülhetett a kezünkbe, tehát **egyszerre húzva minden olyan 24 esetből egyetlen eset lesz, amelyben csak a kihúzás sorrendje volt különböző.** Így az esetek száma:

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

ami – elvégezve a lehetséges egyszerűsítéseket – jól láthatóan 5.

Két golyót ugyanannyiféleképpen lehet kihúzni, mint hármat, hiszen ez a gondolat ismét helyettesíthető az 5-nek a 2 + 3-ra való szétválasztásával.

Ha sorban húzunk kettőt, akkor 5 · 4 féle lehetőségünk van. Közülük azonban azok a húzások ugyanahhoz az esethez vezetnek, amelyekben ugyanazt a két golyót csak fordított sorrendben vettük a kezünkbe. Az esetek száma:

$$\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$$

4. Feladatmegoldások a kiadott feladatsorból válogatva

a) Példák különböző elemek sorba-rendezéseire (ismétlés nélküli permutációk, ismétléses és ismétlés nélküli variációk); egy-egy adat rendszeres változtatása:

- Permutációknál az elemek számának változása; általánosítás n darabra;
- Ismétlés nélküli variációknál adott számú elemből kiválasztott sorozat-hosszak változása: 4 elemből 4, 3, 2, (1) hosszúságú sorozatok készítése; 5 elemből 5, 4, 3, 2, (1) hosszúságú sorozatok;
- Ismétléses variációknál adott számú elemből kiválasztható sorozatok hosszának változása: 2 elemből 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... n hosszúságú sorozatok, 3 elemből 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... n hosszúságú sorozatok, 4 elemből 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... n hosszúságú sorozatok

Permutáció

3 különböző elem egy sorozatát a 3 elem permutációjának nevezik. (Pl. az a, b, c két permutációja: abc, és bac.) **A kombinatorika egyik kérdése, hogy 3, 2, 4, 5, ... n különböző elemnek hányféle sorozatát lehet elkészíteni, azaz hogy mennyi a 3, 2, 4, 5, ... n különböző elem permutációinak a száma.**

Példáinkat általánosítva elmondhatjuk, hogy

2 különböző elem permutációinak száma:	$2! = 1 \cdot 2 = 2$
3 különböző elem permutációinak száma:	$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
4 különböző elem permutációinak száma:	$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
5 különböző elem permutációinak száma:	$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$
...	...
n különböző elem permutációinak száma:	$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n$

Jelekkel: $P_n = n!$

Minthogy **az elemek különböznek egymástól**, egy-egy sorozatban nem ismétlődhet ugyanaz az elem, ezért ezeket az eseteket **ismétlés nélküli permutációknak** nevezzük.

A harmadik fejezetben foglalkoztunk olyan permutációkkal is, ahol a sorozatban szereplő elemek nem mind különböznek, illetve nem mind különböztethetők meg. Ezeket a sorozatokat ismétléses permutációknak nevezzük.

Feladat: Gyűjtse össze az eddig megoldott feladatok közül azokat, amelyek valahány elem ismétléses vagy ismétlés nélküli permutációinak számát kérdezte! Próbáljon újabb „beöltöztetéseket is kigondolni!”

Variáció

Amikor **7 gyerek futóversenyt rendez**, akkor előfordul, hogy csak **az első három beérkező** nevét jegyzik. Példánkban ismét sorozatokat hozunk létre, de nem feltétlenül az összes elemből, hanem **meghatározott hosszú sorozatot alkotunk. A 7 elemből alkotható egy ilyen 3-as hosszúságú sorozat neve: 7 elem harmadosztályú variációja.** Például ha a futóverseny résztvevői A, B, C, D, E, F, és G, akkor e hét elem harmadosztályú variációi a CDA, BCD, ADC, EBF, GAE stb.

Kérdezhetjük, hogy az első három helyezés szempontjából hányféle lehet a beérkezés sorrendje, azaz 7 elemből hányféle 3-as hosszúságú sorozat készíthető? A kérdést így is fogalmazzák: **ennyi a 7 elem harmadosztályú variációinak a száma.**

A válasz: $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$. (Hiszen elsőnek érkezhet bármelyikük; akármelyik gyerek az első, mindig 6 másik közül kerül ki a második, s ha az első kettő beérkező nevét már feljegyeztük, 5 gyerek közül kerülhet ki a harmadik.)

A faktoriális jelölésére bevezették azt az írásmódot, hogy az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$ szorzatnak csak az utolsó tényezőjét írjuk le, s utána „!” jelet írunk, ennek felhasználásával lerövidíthetjük a fenti alakot. Pl.

$$7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{7!}{4!}$$

A jelölés ügyességét jobban látjuk, ha pl. nem 7, hanem 20 elemből választhatjuk a sorozatok elemeit, s a sorozat hossza sem 3, hanem pl. 8. Most egy 8 tényezős szorzatot írunk le ilyen egyszerű tört-alakban:

$$20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 = \frac{20!}{12!}$$

Természetesen még indokoltabb ez az írásmód általános esetben: ha n elem felhasználásával k hosszúságú sorozatokat készítünk, és ezek számát akarjuk kifejezni. Az n elem k-ad osztályú variációinak számát így szokás jelölni:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Példánk értelmezi, hogy ezekben az esetekben ugyanaz az elem nem szerepelhet többször egy sorozatban, ezért ezeket az eseteket **ismétlés nélküli variációknak nevezzük.**

A fenti 7 gyerek kiírhat például 3 fordulós futóversenyt is. Most csak az első helyezéseket szeretnénk jegyezni. Mondjuk, fontos lehet az is, hogy ki nyeri az első versenyt, ki a másodikat, ki a harmadikat, s nemcsak az fontos, hogy ki hányszor lesz nyertes. Hányféle eredménye lehet ennek a versenynek?

Újra 7 elemből alkotunk 3 tagú sorozatokat –, azaz variációkról van szó. Csak-hogy most előfordulhat, hogy ugyanaz a név kétszer vagy akár háromszor szerepel egy sorozatban, mert két vagy három esetben is ugyanaz a nyertes. **Az ilyen sorozatot ismétléses variációnak – konkrétan 7 elem harmadosztályú ismétléses variációjának – nevezzük.**

Mennyi a 7 elem harmadosztályú ismétléses variációinak a száma?

Első alkalommal bárki lehet első: ez 7 lehetőség. Második alkalommal szintén 7-féle lehetőség van arra, hogy ki a nyertes, függetlenül attól, hogy kinek a nevét jegyeztük fel első alkalommal. Hasonlóan a harmadik alkalommal is. Összesen tehát $7 \cdot 7 \cdot 7$, azaz 7^3 a lehetőségek száma.

Feladat: Gondolja végig, hányféle lehetőség van akkor, ha a 7 gyerek 4 fordulós hasonló versenyt ír ki, és mennyi a lehetőségek száma, ha csak 2 fordulót rendeznek!

Gondolja végig a 2, 3, 4 fordulós versenyt akkor, ha csak 2 gyerek verseng egymással, ha hárman vannak, vagy ha négyen vannak!

Az n elem k-ad osztályú ismétléses variációinak száma:

$$V_n^{k \text{ ism.}} = n^k$$

Figyeljünk fel arra, hogy az „ismétléses permutációk” és az „ismétléses variációk” esetekben mást jelent az „**ismétléses**” kifejezés!

A **permutációkban** „ismétléses” esetben a készlet elemei között vannak azonosak, megkülönböztethetetlenek, s így alkotjuk az összes elem sorozatait.

A **variációk** esetén csupa különböző elem szerepel a készletben, de a sorozat elemeiként mindegyiket felhasználhatjuk egymás után több helyen, akár a sorozat mindegyik tagjaként is.

Ez utóbbi eset fordul elő, amikor nem tárgyakból, hanem fogalmakból, jelekből alkotunk sorozatokat, hacsak nincs olyan kikötés, amely szerint egy sorozatba csak különböző elemeket tehetünk. (Pl. ha adott betűkből készítünk monogramokat, nincs okunk azt gondolni, hogy a családnév és a keresztnév csak különböző betűkkel kezdődhet. Ha azonban csupa különböző betűkártyát adunk a gyerekek kezébe, s ezek egymás mellé állításával kell kirakniuk a monogramokat, akkor ismétlés nélkülivé válik a variációs feladat. Hasonlóan különbözik a két feladat, amikor számjegyekből és amikor számjegy-kártyák kirakásával kell képezni 2-, 3- ... jegyű számot.)

Feladat: Gyűjtse össze a már megoldott feladatok közül azokat, amelyekben a variációk számát kerestük, és különböztesse meg az ismétléses és ismétlés nélküli eseteket!

b) Példák (elemi bejárással) kiválasztások számának megállapítására, miközben a „készlet” változatlan, a kiválasztott elemek száma változik.

(Például körvonal 8 (7 vagy 6) pontjához illesztve szakaszok, háromszögek, négyszögek, ötszögek, hatszög(ek)... rajzolása; a fenti alakzatok számának keresése.)

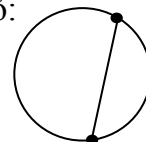
5. Feladatmegoldások: két adat rendszeres változtatása; az esetek számának táblázatba rendezése, a benne felismerhető összefüggések magyarázatának keresése.

Kombinációk

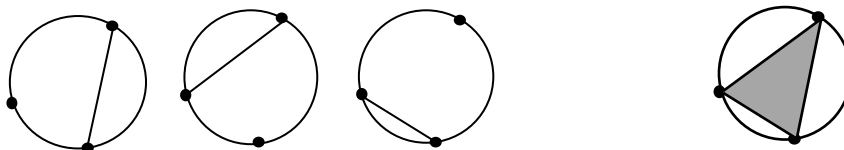
1. Vizsgáljuk a körvonal jelölt pontjaira rajzolható szakaszok, háromszögek, négyszögek ... számát!

Legyen először 2 pont a körön! A két pontra egyetlen szakasz illeszthető:

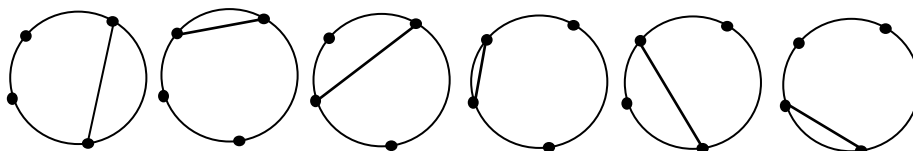
Háromszög, négyszög, ötszög ... nem rajzolható rá úgy, hogy a csúcsok a jelölt pontokra kerüljenek.



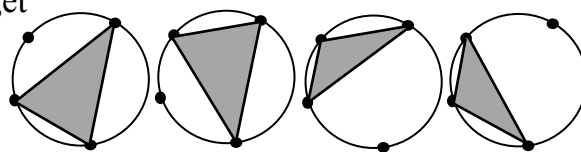
Három pont már 3 szakaszt határoz meg, és egy háromszöget:



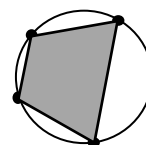
Négy pontra 6 szakaszt rajzolhatunk, a 4 pont közül hatféle párt választhatunk:



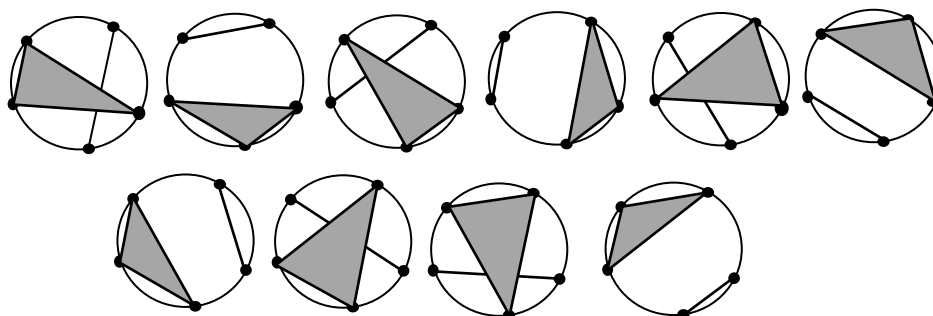
4 háromszöget



és 1 négyszöget:



Öt pontra 10 szakasz illeszthető – hiszen mindegyik pont összeköthető másik négygyel, s így minden összekötést kétszer veszünk figyelembe. Ha arra a három pontra illesztünk egy-egy háromszöget, amely a szakasz rajzolásából kimarad, akkor megrajzoljuk az összes lehetséges háromszöget is:

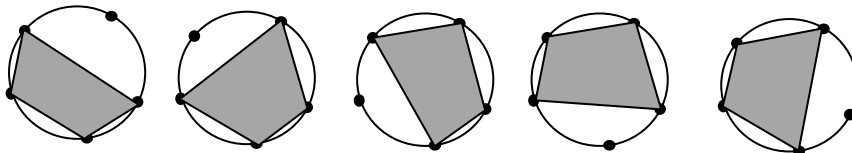


A háromszögek számának meghatározásához követhetjük azt a gondolatmenetet is, hogy előbb az 5 elem 3-ad osztályú ismétlés nélküli variációit számoljuk össze, (azt, hogy hányféleképpen tudunk 3 pontot kiválasztani sorrendben az öt közül), s aztán egyé-eggyé fogjuk össze azokat a sorozatokat, amelyekben ugyanazok a pontok szerepelnek (azaz, amelyek csak a sorrendben térnek el egymástól). Az 5 elem harmadosz-

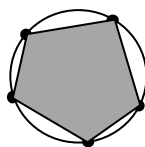
tályú ismétlés nélküli variációinak száma $5 \cdot 4 \cdot 3$; a három kiválasztott elem sorrendjeinek száma pedig $1 \cdot 2 \cdot 3$. A háromszögek száma:

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$$

A négyszögek száma annyi lesz, ahányféleképpen kihagyhatunk az 5 pont közül egyet, tehát 5:



és persze egyetlen ötszög illeszthető az öt pontra:



Foglaljuk táblázatba az eddig átgondolt adatokat!

Pontok száma							
1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0
3	3	1	0	0	0	0	0
4	6	4	1	0	0	0	0
5	10	10	5	1	0	0	0

Felejtsük el egy pillanatra, hogy miről szólnak ezek a számok! Hogyan folytathatnánk magának a táblázatnak a kitöltését? Milyen összefüggést lehet felismerni benne? Felismerhetjük, hogy bármely szám annak a két számnak az összege, amelyik pontosan fölötte áll és attól balra. ($3 = 1 + 2$; $4 = 1 + 3$; $10 = 4 + 6$ stb.) Ha ezt a szabályt követjük, akkor így folytatódik a táblázat:

6	15	20	15	6	1		
7	21	35	35	21	7	1	
8	28	56	70	56	28	8	1

A táblázatban felismert összefüggés következik-e a vizsgált problémából? Például igaz-e, hogy a körvonal 7 pontjára annyi ötszög rajzolható, ahány ötszög és ahány négyszög a 6 pontra?

Válasszuk meg azt a pillanatot, amikor éppen felrajzoljuk a körvonalra a hetedik pontot. Mielőtt felrajzoltuk volna, a 6 pontra ráillesztettünk 6 ötszöget és 15 négyszöget (ha addig „igazak” a táblázatunk adatai). Nézzük meg, hogy amikor felvesszük a hetedik pontot is, miféle ötszögek illeszkedhetnek a hét pontra. Először is az összes

ötszög szerepelni fog most is, amit már a 6 pontra megrajzoltunk. Ezek azok, amelyeknek nem csúcsa a hetedik pont. Azok az ötszögek pedig, amelyeknek csúcsa lesz ez a hetedik, a régi hatból 4 pontot fognak tartalmazni. Tehát ahányféle négyszög volt a 6 ponton, annyi olyan ötszög lesz a hét ponton, amelynek a hetedik pont is csúcsa. Ez a gondolatmenet bármely szám származtatását magyarázza, tehát elfogadhatjuk az ilyen szabállyal képzett táblázatot a fenti probléma megoldásaként.

Ha két „apró” mozzanattal kiegészítjük a gondolkodásunkat, szép szimmetrikus számpiramist kapunk. Az egyik mozzanat az, hogy a szakaszok, háromszögek... rendjét balra még kiegészíthetjük az első oszlop számaival, ha átfogalmazzuk a kérdést. Ugyanis a szakasz 2 pont kiválasztását, a háromszög 3 pont kiválasztását... jelenti, visszafelé lépve kérdezhetjük, hogy hányféleképpen választhatunk ki 1 pontot az 1, 2, 3, ... pontból. A másik (matematikai szempontból indokolt, de talán kevésbé természetes) kiterjesztés: azt is felvethetjük, hogy 1, 2, 3... pontból hányféleképpen választhatunk ki 0 pontot. A válasz az, hogy éppen 1 féleképpen: úgy, hogy nem választunk egyet sem. Így a táblázat még egy, csupa 1-esből álló oszloppal bővül:

1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	

A táblázat szimmetriája úgy válik nyilvánvalóvá, ha kicsit eltoljuk, és szimmetrikus háromszög alakban rendezzük el a számokat:

				1					
			1		1				
		1		2		1			
	1		3		3		1		
	1	4		6		4		1	
	1	5	10		10	5		1	
	1	6	15	20	15	6		1	
	1	7	21	35	35	21	7		1
1		8	28	56	70	56	28	8	1

Ennek a számtáblázatnak a neve: Pascal-háromszög.

Feladat: Készítse el önállóan a Pascal-háromszöget, és folytassa legalább 5 sorral! Olvasson le különféle szabályosságokat a táblázatról, keressen sokféle összefüggést soronként, ferde oszloponként...!

Kombináció

Gondoljuk meg most a többi esettől függetlenül, hogy **hányféleképpen választhatunk ki 7 elem közül ötöt egyszerre**, azaz nem sorbarendevezve őket. Úgy is fogalmazhatjuk a kérdést, hogy egy **7 elemű halmaznak hány 5 elemű részhalmaza van. Egy ilyen részhalmaz a 7 elem ötöd osztályú kombinációja**; tehát a kérdés másképpen ez: hét elemnek hány ötöd osztályú kombinációja van.

Ha **sorban**, egymás után választanánk, akkor **5-ös hosszúságú sorozatokat** alkotnánk a 7 különböző elemből, azaz 7 elem ötöd osztályú variációit alkotnánk meg. **Ezek száma $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$** . Minthogy a sorrendezéstől el akarunk tekinteni, **ugyanannak az 5 elemnek az összes: $5!$ permutációját egyetlen esetnek tekintjük**. Így a 7 közül 5 elemű halmazok kiválasztásának száma:

$$C_7^5 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

Az ismert faktoriális-jelöléssel:

$$C_7^5 = \frac{7!}{(7-5)! \cdot 5!}$$

Azt a törtet, amelynek a számlálójában az n számtól kezdődően k darab egyesével csökkenő szám szorzata áll, a nevezőjében pedig $k!$, azaz szintén k darab, 1-től egyesével növekvő szám szorzata, úgy olvassuk: „ n alatt a k ”, és így jelöljük:

$\binom{n}{k}$, (amelynek értéke számítható így is: $\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$)

$$\text{Tehát a } \binom{7}{5} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \text{ Egyszerűsítve ez } = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = \binom{7}{2}$$

Általában meggondolható, – ami a fenti táblázat szimmetriáját is igazolja –, hogy n elemből ugyanannyiféle k elemű részhalmaz választható ki, mint $n - k$ elemű.

Ha n elemből k elemszámú részhalmazt választunk, ez az n elem k -ad osztályú kombinációja. **Az n elem k -ad osztályú kombinációinak száma az n elem k -ad osztályú variációk számának $1/k!$ -szorosa:**

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{V_n^k}{k!}$$

2. Egy pénzermével 10-szer dobunk. Egy számegyenes 0 pontjáról indulva jobbra lépünk, ha az érmén „fej” van felül, és balra, ha „írás”. Mely számokra érkezhetünk a tíz dobás után? Melyikre hányféle módon?

A tíz dobás eredménye lehet pl.: FIIIIFFIFI, vagy FFFFIIFIFF ...

Az előbbi esetben összesen 4 lépést teszünk jobbra és 6-ot balra, tehát a -2 -re érkezünk. Ugyanide jutnánk akkor is, ha az első hat dobás lenne I és az utolsó négy F, vagy ha bármilyen más sorrendben következne be a 4 F és 6 I. A másik esetben 7-szer kell

jobbra lépni és 3-szor balra, tehát a 4-esre jutunk. Ugyanide érkezünk minden olyan esetben, amikor a tíz dobás 7 F és 3 I.

Minthogy a F és az I ellentétes irányú lépést jelent, a két szám különbsége: az F-ek száma mínusz az I-k száma adja meg a lépéssorozatok végét. Két páros szám különbsége is páros, két páratlané is páros, ezért csak a páros számokra érkezhetünk -10-től 10-ig.

-10-re érkezünk, ha minden dobás I, 10-re, ha mind F. Ezek csak egyféleképpen következhetnek be.

Hányféle lehetősége van pl. a 4-re jutásnak? Annyi, ahányféleképpen sorba rendezhetünk 7 egyforma és 3 egyforma, de az előzőktől különböző betűt. Ez ismétléses permutáció – mondhatjuk: 10 elem sorozatainak száma, amelyben 7 egyforma és 3 egyforma elem van:

$$\frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3)}$$

Másképpen is gondolkodhatunk. A kérdést az jelenti, hogy a dobások tíz sorszáma közül hányféleképpen választható ki az a 3, ahányadik dobás után I-re esett az érme. Vagy: hányféleképpen választható meg az a 7 sorszám, ahányadik dobás F. Ez a fogalmazás pedig kombinációként értelmezi a problémát: 10 elem harmad osztályú kombinációinak, illetve 10 elem heted osztályú kombinációinak számát keressük. A válasz természetesen ugyanaz, mint az előbb:

$$\binom{10}{3} = \binom{10}{7}$$

Feladat: Határozza meg, hányféleképpen érkezhetsz a többi helyre! Dolgozzon mindkétféle gondolatmenettel; némelyik esetet az egyik, némelyiket a másik szerint gondolja végig!

3. Hányféleképpen lehet kitölteni az ötös lottót? Hányféleképpen a hatos lottót?

4. Készítsen lottószelvényt 9 számmal! Hányféle kitöltés lehetséges, ha 2 számot húznak? Hányféle akkor, ha 3, 4, 5 vagy ha 6 számot húznak?

5. Egy 32 lapos magyar kártyából osztottak 4 lapot. (A kártyában 8 „piros”, 8 „makk”, 8 „tök” és 8 „zöld” lap van, mindegyikből 4 számozott lap: VII, VIII, IX, X, és 4 figura: alsó, felső, király, ász.)

- a) Hányféle kiosztás lehet, amelyben mindegyik lap piros?
- b) Hányféle kiosztás lehet, amelyben van piros lap?
- c) Hányféle kiosztás lehet, amelyben van figura?

Keressen a megoldott feladatok között, a feladatgyűjteményben (és másutt) olyan feladatokat, amelyeket lehet kombinációként értelmezni! Oldja meg! Gondolja el, hogy másféle értelmezése is lehetséges-e, s fogalmazza át úgy a kérdést!

KOMBINATORIKUS FELADATOK

1. Írja le az összes olyan háromjegyű számot, amelyben csak páros számjegyek vannak, 500-nál nagyobb és 4-gyel osztható!

Rendezze el őket a) fadiagramon;

b) táblázatosan!

2. Egészítse ki a táblázatot!

Fogalmazza meg a feltételt, amely alapján a számok készülhettek!

222	522	
	525	
		652
		655
256		
	562	
		666

Készítsen más táblázatot és fa-diagramot a feladathoz!

3. Rajzolja le a fa-diagramot, és egészítse ki a számok felsorolását, elrendezését!



Írja le a feladatot, amelynek ez megoldása!

Készítsen táblázatot és más fa-diagramot ugyanezekhez a számokhoz!

4. Gyöngyfűzések

a) Hányféle gyöngysor fűzhető 7 különböző színű gyöngyszemből?

b) Hányféle akkor, ha a 7 gyöngyszem között 3 piros és egy-egy fehér, kék, zöld és sárga van?

c) Hányféle akkor, ha 3 piros, 2 kék és 2 sárga van köztük?

d) Hányféle készíthető 3 piros, 3 sárga és 1 kék gyöngyszemből?

(Készítse el a gyöngysorokat - színnel, vagy kezdőbetűvel jelölve a szemekeket, - aztán hasonlítsa össze a különféle feltételek szerinti lehetőségeket!)

5. Hányféle lesz a gyöngysorok száma, ha körbefuthatnak a szálon a gyöngyszemek?
(L. az előbbi feladatok mindegyikét.)

6. Négy szám - sok összeadás, kivonás

Itt van négy szám:

9 4 7 13

- a) Készítsen velük kéttagú összeadásokat! (Pl.: $9+4$, $4+9$, $9+9$, $9+7$, ...)
Hányféle összeadás készíthető belőlük?
- b) Három-három számot adjon össze! (Pl.: $9+4+7$, $4+4+7$, $7+7+7$, $7+4+9$, ...)
Hányféle összeadás készíthető?
- És ha a tagok sorrendje sehol sem lehet csökkenő (azaz fenti példánkban csak a $4+4+7$ és a $7+7+7$ megfelelő)?
- c) Négy-négy számmal is írjon összeadásokat!
Hányféle összeadás írható, ha a tagok tetszőleges sorrendje megengedett?
És ha mindig a legkönnyebben elvégezhető sorrendű összeadást jelöli ki a kiválasztott tagokkal?
- d) Gyűjtse össze a lehetséges kivonásokat! (Kisebb számból ne vegyen el nagyobb-
bat!)
- e) Összeadás, kivonás vegyesen: (Három szám, egy összeadás és egy kivonás.
Pl: $9+9-4$, $9+9-9$, $9+13-7$, $13-7+9$, ...)
Hány feladat készíthető?
- f) Készítsen feladatsort, amelyben nemcsak a számolási készség fejlődik, hanem
valamilyen fontos összefüggés megértése is kialakulhat! (Melyik az az összefü-
gés?)

7. Oldja meg a 4. osztályos tankönyv 91. old. 10. feladatát! Vesse össze a 7. feladattal!

10. Gyakorold az összeadást, kivonást fejben 00-ra végződő négyjegyű számokkal!

- a) Ezzel a négy számmal dolgozz:

3600, 1800, 2500, 2700

- (1) Hányféle kéttagú összeadást tudsz írni velük?
(2) Hányféle háromtagú összeadást tudsz írni velük?
(3) Számítsd ki a négy szám összegét többféle sorrendben!
(4) Számítsd ki az összes kivonást, amit a négy számmal felírhatsz, ha nem veszel el kisebb számból nagyobbat!

8. Zoltánnak magyarból, matematikából, környezetismeretből, énekből, testnevelésből és rajzból egész évben csak négyesei és ötösei voltak.

Hogyan alakulhat a bizonyítványában a hat tárgy osztályzata? (Készítsen róla táblázatot!)

9. Hány totószelvényt kellene kitölteni különbözőképpen, hogy biztosan legyen telitalálatos szelvény köztük?

*Ha az összes lehetséges kitöltést elkészítenénk, hány szelvényen lenne 13 találatunk? Hány szelvényen lenne 12?

10. Hány lapból áll az a logikai készlet, amelynek lapjain ház, fa, virág és nap lehet piros vagy kék alapszínen? (A lapokat úgy lehet jellemezni, hogy van-e rajta ház, vagy nincs, van-e rajta fa, vagy nincs, van-e rajta virág, nap, vagy nincs.)

Készítse el a készletet! Tervezzen meg vele egy játékot!

11. Hány telefon-előfizető lehetett Budapesten, amikor át kellett térni a 7-jegyű telefonszámokra?

Mekkora számnál kell majd áttérni a 8-jegyű telefonszámokra?

12. Mennyivel több autónak lehet rendszámablát kiadni az új rendszer szerint, mint a régi szerint? (Régebben két betű és egy négyjegyű szám, most három betű és egy háromjegyű szám áll a rendszámablán.)

Mennyivel emelheték volna a lehetőségek számát, ha a betűpáros mellett 5 számjegyű szám állna?

És ha a 4-jegyű szám elé három betű került volna?

Hogyan lehetett volna lényegesen növelni a lehetőségek számát, ha a betű- és számjegyek számát (a 6-ot) meg kell tartani?

13. Írja le az összes négyjegyű számot, amelyet a

2

2

3

5

 számkártyák valamilyen sorrendezésével lehet előállítani! A leírásuk előtt gondolja ki, hogy mennyi lesz az összes ilyen szám összege!

14. Hányféleképpen szőnyegezhetők a színesrudak?

(Két kirakást megkülönböztetünk akkor is, ha ugyanazokból a rudakból állnak ugyan, de más sorrendben.)

15. Hány olyan szám van, amelyben nincs 0-s számjegy és a számjegyeinek összege 6?

Hogyan alakul a lehetőségek száma, ha a számjegyek összege 1, 2, 3, 4, 5, (6), 7, 8, 9, 10, ..., n?

Igazolja általánosítását! (Készítsen táblázatot, amelyben külön veszi számba az egyjegyűeket, külön a kétjegyűeket, ...)

16. Hányféleképpen olvasható ki a „gyémántok” szó a táblázatból, ha csak szomszédos mezőre szabad lépni (jobbra és lefelé)?

a)

G	Y	É	M	Á	N
Y	É	M	Á	N	T
É	M	Á	N	T	O
M	Á	N	T	O	K

b)

G	Y	É	M	Á
Y	É	M	Á	N
É	M	Á	N	T
M	Á	N	T	O
Á	N	T	O	K

17. Hányféleképpen rakhatók ki a színesrudak, ha egy-egy kirakásban nem szerepelhet más szín, mint fehér és rózsaszín?
18. Az 5-éves Móni egyszerre már 2-t is tud lépni a lépcsőn. Hol egyet, hol kettőt lép. Hányféleképpen juthat fel a lépcsősor tetejére?
- 19.* Hányféleképpen rakhatók ki a színesrudak, ha egy-egy kirakásban csak fehér, rózsaszín és piros szerepelhet?
(M.: 1, 2, 3, 5, 9, 16, 28, 49, 86, ...)
20. A számegyenesen egyesével ugrál a Bolha. A 0-tól indul, és 10 ugrással szeretne a 6-osra érni.
Hányféleképpen teheti ezt meg?
21. Panka a lépcsősor alján észreveszi, hogy a lépcső tetején, a 6. fokon van a labdája. Lép föl is, le is: 10 lépéssel ér fel a labdáért.
Hányféleképpen tehette meg az utat?
22. Kata néni összeírta karácsony előtt, hogy miket akar vásárolni. Feljegyezte a kiválasztott ajándékok árát is:
- | | | | |
|---------|--------|-------------|---------|
| szandál | 670 Ft | társasjáték | 1245 Ft |
| lemez | 360 Ft | blúz | 950 Ft |
| könyv | 180 Ft | melegítő | 1760 Ft |
| kesztyű | 620 Ft | sapka | 380 Ft |
| edény | 774 Ft | toll | 360 Ft |
- Megvett már 2 (3, 4, ...) ajándékot.
Mennyit fizetett?
23. Tíz gyerek sakk-körmérkőzést szervez, visszavágóval.
Hány mérkőzés ez?
24. A barátok kézfogással köszöntik egymást: mindenki mindenkivel kezét fog.
Hány kézfogás történik egy találkozáskor?
25. Egy nagy körvonalon kijelölünk n pontot.
Hány szakasz húzható úgy, hogy végpontjai a kijelölt pontok közül való legyen?
Hány háromszög rajzolható úgy, hogy csúcsait a jelölt pontok közül választjuk?
Hány négyszög, ötszög, ... rajzolható hasonló feltételekkel?
(Készítsen táblázatot a megvizsgált esetekről! Keressen összefüggést a táblázat számai között! Keressen magyarázatot a talált összefüggésekre!)

26. Öt jó barát együtt tölti a szombatot. Ketten pingpongoznak, hárman társasjátékot játszanak.

Hány pingpong mérkőzést kell betervezniük, ha mindenki mindenkivel játszik egy meccset?

Hány társasjátékot játszanak, ha mindenféle összeállításban szeretnének játszani?

27. Hogyan alakulnak a fenti számok, ha hat barát tölti együtt a szombatot? (Most is 2 gyerek pingpongozik egyszerre és 3 játszik a társasjátékkal.)

És ha négyen is részt vehetnek a társasjátékban egyszerre?

28. Dolgozzunk ki 9-es (6-os) lottószelvényre „igazságos” nyerési feltételeket, ha

- | | |
|--------------------|---------------------|
| a) 2 számot húznak | b) 3 számot húznak |
| c) 4 számot húznak | d) 5 számot húznak! |

29. Hány szelvényt kellene kitölteni, hogy biztosan ötöse legyen a lottón?

30. Egy autós kártyacsomagban 4 szín van (piros, sárga, zöld, kék), három fajta autó (személy-, teher- és versenyautó), és mindegyikből van jobbra néző és balra néző.

- a) Hányféleképpen lehet kivenni belőle 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 lapot?
- b) Hányféleképpen lehet kivenni 4 lapot, hogy mindegyik lap piros legyen?
- c) Hányféleképpen lehet kivenni 4 lapot, hogy mindegyik lapon személyautó legyen?
- d) Hányféleképpen lehet kivenni 4 lapot, hogy mindegyik lap balra néző legyen?
- e) Hányféleképpen lehet kivenni 4 lapot, hogy legyen köztük sárga lap?
- f) Tegyen fel magának újabb kérdéseket, és gondolja végig!

(Ha nehezek ezek a kérdések, készítsen előbb kisebb készletet, és abban próbáljon tájékozódni!)

31. A piros és a sárga szögletes lapokkal dolgozzunk a logikai készletből!

- a) Válasszon ki egy lapot! Gyűjtse külön azokat, amelyek 1 tulajdonságban különböznek tőle, külön azokat, amelyek 2 tulajdonságban térnek el tőle, külön a 3 és külön a 4 tulajdonságban eltérőket!

Melyik csoportban hány lap van?

Próbálja ki más lappal!

- b) Hogyan alakulnak a számok, ha megkettőzzük a készletet: mindegyikhez készítünk egy érdes felületű, egyébként azonos tulajdonságú másolatot?
- c) Hogyan alakulnak a számok, ha a fenti készletnek csak a nem lyukas lapjaival dolgozunk?
- d) Keressen további kiterjesztést!

32. a) Hány szám építhető fel szorzatként a következő prímtényezőkből? (Az egyetlen számot most 1 tényezős szorzatnak nevezzük.)

2 2 2 3 5 5 11

Rendezze el a megépített számokat fa-diagramon!

Jellemezze az előállított számokat közös, meghatározó tulajdonságukkal!

- b) Hány szám építhető fel szorzatként, ha két 2-es, három 3-as, egy 7-es és egy 17-es közül válogathatunk?

33. 100-as létszámú évfolyamból öt 20-as tanulócsoportot szervezünk.

Hányféleképpen lehetséges ez, ha a tanulócsoportok számozását

a) figyelembe vesszük?

b) nem vesszük figyelembe?

34. Hányféleképpen lehet kirakni a színesrudakat, ha egy-egy kirakáshoz legfeljebb 3 darabot használhatunk?

Keressen magyarázatot!

35. Hányféle egész oldalhosszú 96 egység területű téglalap van? És 2160 egység területű?

(Miféle hosszúság- és terület- egységválasztás esetén igaz a megállapítása?)

36. Hányféle téglatest építhető 360 kis fehér kockából?

37. Hét számkártyánk van:

a)

8	1	5	7	3	9	4
---	---	---	---	---	---	---

b)

8	0	5	7	3	9	4
---	---	---	---	---	---	---

c)

8	1	1	7	3	3	3
---	---	---	---	---	---	---

Hányféleképpen lehet két háromjegyű számot kirakni belőlük?

Melyik választásnál lesz a két szám összege a legnagyobb?

Melyiknél lesz a két szám különbsége a legnagyobb? A legkisebb?

Fogalmazzon meg további érdekes kérdéseket!

38. 4 piros, 2 sárga és 1 zöld golyó közül húzunk ki hármat.

a) Hányféle hármas húzhatunk, ha egyszerre vesszük ki őket?

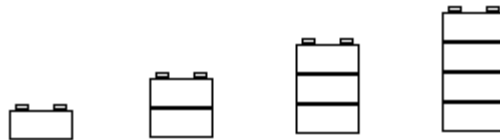
b) Hányféleképpen húzhatunk, ha egymás után egyenként vesszük ki a golyókat, és megkülönböztetjük a más sorrendben kivett, egyébként megegyező hármasokat?

c) Hogyan alakul a lehetőségek száma, ha a kivett golyót visszatesszük és mind a hármat az eredeti 7 golyó közül húzzuk?

39. Hány kétjegyű szám készíthető az 1, 2, 3 felhasználásával?

40. Hány háromjegyű szám készíthető az 1, 2, 3 felhasználásával?

41. Hány háromjegyű szám készíthető az 1 és a 2 felhasználásával?
42. Készítsen sok 2-es, sok 3-as és sok 5-ös számkártyát!
Rakjon ki a számkártyákkal háromjegyű számokat!
Alkosson valamilyen rendszert, amelyben elrendezhetők ezek a számok!
43. Készítsen háromcsíkos zászlókat! Csak piros, sárga és zöld csíkokat szabad festeni!
Hány országnak jut más-más zászló?
(Lehet, hogy ugyanannyi-féle zászló lesz, mint ahány háromjegyű szám a három számjegyből? Vagy van valamilyen különbség?)
44. Készítsen háromcsíkos zászlót piros, sárga és zöld csíkokkal! Mindegyik 3 színű legyen! (Vesse össze a feladatot az előzővel!)
45. Citrom, málna és csoki fagyit lehet kapni. Édesanya háromgombócos fagyira fizet be. Milyet lehet kérni?
(Van, aki megkülönbözteti a csoki-csoki-málna fagyit a málna-csoki-csokitól. Gondolja meg a lehetőségeket úgy is, hogy megkülönböztet két fagyit, ha ugyanaz az összetétel, de más a sorrend, és úgy is, ha nem tesz különbséget a kettő között!)
46. Hányféle 1-, 2-, 3-, 4-... szintes lego-torony készíthető
a) piros és sárga négyzet alapú elemekkel?
b) piros, sárga és kék négyzet alapú elemekkel?
c) piros, sárga, fehér és kék négyzet alapú elemekkel?



(Készítsen táblázatot a lehetőségek számairól! Keressen magyarázatot az összefüggésekre!)

47. Hogyan alakul a lehetőségek száma, ha a 42. feladat tornyaiban nem kerülhet közvetlen egymásra azonos színű elem?
48. Hány 5 betűs szó alkotható, amelyben csak a második és negyedik helyen van magánhangzó? (14 magánhangzót és 24 mássalhangzót használhatunk.)
49. Keressen a megoldott feladatok közül olyanokat, amelyek hasonló szerkezetűek! Fogalmazza meg a közös gondolatot!
50. Fogalmazzon minél több különféle „külső” feladatot, ami azonos szerkezetű egy kiválasztott feladattal!

KOMBINATORIKUS FELADATOK MEGOLDÁSA

A kiadott feladatok egy részének teljes kidolgozását kézbe adjuk, hogy legyen néhány minta, amit más feladatoknál is lehet követni. *Más feladatok megoldásához csak egy-egy lehetséges ötletet írunk le (induláshoz vagy gondolatmenet-vázlatként; ezt dőlt betűvel szedjük), vagy ennyit sem.* A lehetőségek számát mindegyik esetben megadjuk, hogy a végig gondolt feladat önellenőrzéséhez támpontot kapjon az Olvasó.

1. A feladat 4 feltételt fogalmaz meg a felépítendő összes számra vonatkozóan. Az egyik az, hogy háromjegyű legyen, a másik, hogy 500-nál nagyobb legyen, a harmadik szerint minden számjegynek párosnak kell lennie, s a negyedik szerint a számnak 4-gyel oszthatónak kell lennie. Egyszerre nehéz mindenre figyelni, érdemes egyszerre csak egy (vagy esetleg egymással összekapcsolható két) feltételre figyelni. Amikor valamit már teljesítettünk, akkor ezzel leszűkítettük a lehetőségek számát, és a további feltételeket ebben a leszűkített világban valósítjuk csak meg.

Ha 500-nál nagyobb háromjegyű számokról van szó, akkor csak 5, 6, 7, 8 vagy 9 lehet az első számjegyű. Minthogy azonban mindegyik számjegy páros, kiesik az 5, 7 és 9, és kétféle lehetőség marad a százask helyének kitöltésére:



Ha a szám 4-gyel osztható, akkor az itt letakart kétjegyű számnak kell 4-gyel oszthatónak lennie. Köztük a csak páros számjegyűek a következők:

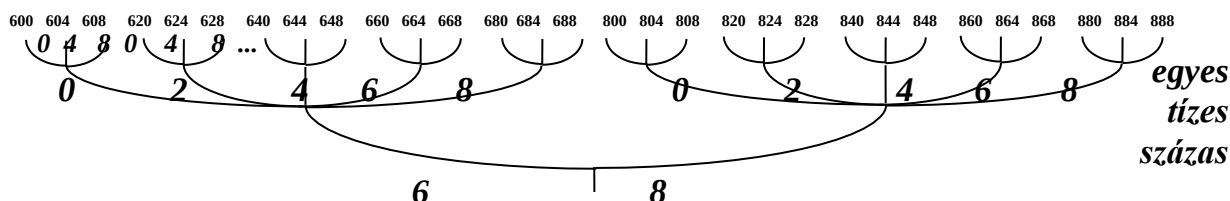
00, 04, 08, 20, 24, 28, 40, 44, 48, 60, 64, 68, 80, 84, 88.

Az összes szám tehát, amely mindegyik feltételt kielégíti, a következő:

600, 604, 608, 620, 624, 628, 640, 644, 648, 660, 664, 648, 680, 684, 688.

800, 804, 808, 820, 824, 828, 840, 844, 848, 860, 864, 868, 880, 884, 888.

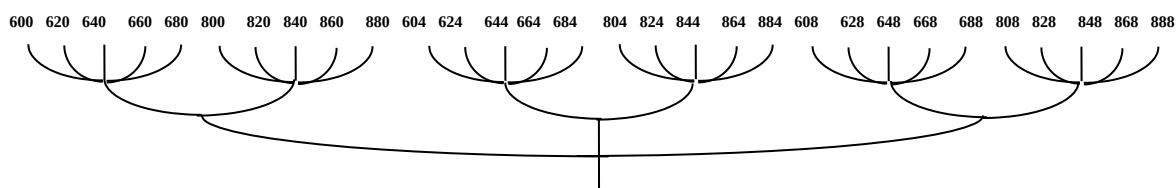
- a) Fadiagramon elrendezhetjük a harminc számot például úgy, hogy a százask helyén álló számjegy szerint először kétfelé választjuk őket (a leírásban a két sor így választotta szét a számokat). Mindkét ágat elágaztathatjuk annyi felé, ahányféle számjegy a tízesek helyén állhat: 5-felé. Ezeket aztán újra továbbágztathatjuk az egyesek helyére írható számjegyek száma szerint, tehát 3 felé. Ha mindegyik szinten balról jobbra növekvő sorrendben rendezzük a megfelelő helyiértékű számjegyeket, akkor éppen növekvő sorrendben rendeztük el a 30 számot:



Ugyanezen a fadiagramon adhatunk más sorrendet is a számjegyeknek (pl. mindenhol csökkenő sorrendet vagy tetszőleges más sorrendet írunk elő), s akkor is teljes, áttekinthető rendet alkottunk.

Ismét más lehetőséget jelent, ha a szempontok sorrendjén változtatunk. Ha például először, legfontosabb szempontként rendezzük sorba az egyesek helyén álló számjegyeket, másodikként a százasként rendezzük sorba az egyesek helyén álló számjegyeket, másodikként a százasként rendezzük sorba az egyesek helyén álló számjegyeket, akkor a fa először ágazik 3 felé, aztán mindhárom ág 2 felé, s ezek 5 felé. Így – ha megtartjuk is a számjegyek növekvő sorrendjét minden szinten – ismét új sorrend keletkezik a számok között.

Mindegyik esetben $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ lehetőség olvasható le a fáról – csak a tényezők cserélődhetnek.



(Gyakorlásként érdemes még más elrendezést, más „felépítésű” fát is elkészíteni.)

- b) A táblázatos elrendezés is a háromféle szempontot veszi figyelembe: azt, hogy mi állhat a százasként rendezzük sorba az egyesek helyén álló számjegyeket, másodikként a százasként rendezzük sorba az egyesek helyén álló számjegyeket, akkor a fa először ágazik 3 felé, aztán mindhárom ág 2 felé, s ezek 5 felé. Így – ha megtartjuk is a számjegyek növekvő sorrendjét minden szinten – ismét új sorrend keletkezik a számok között.

Tízesek száma:		0	2	4	6	8	
Százasként rendezzük sorba az egyesek helyén álló számjegyeket, másodikként a százasként rendezzük sorba az egyesek helyén álló számjegyeket, akkor a fa először ágazik 3 felé, aztán mindhárom ág 2 felé, s ezek 5 felé. Így – ha megtartjuk is a számjegyek növekvő sorrendjét minden szinten – ismét új sorrend keletkezik a számok között.	6	Egyesek száma 0	600	620	640	660	680
		Egyesek száma 4	604	624	644	664	684
		Egyesek száma 8	608	628	648	668	688
	8	Egyesek száma 0	800	820	840	860	880
		Egyesek száma 4	804	824	844	864	884
		Egyesek száma 8	808	828	848	868	888

A táblázatos elrendezés is más-más akkor, ha ugyanilyen szempont-elrendezés mellett más sorrendet írunk elő a számjegyek számára (pl. az egyesek és a tízesek helyén állók csökkenő sorrendben következzenek, a százasként növekvő sorrendben). Ismét más elrendezést kapunk, ha a táblázatot más szempont szerint bontjuk. Például megtehetjük, hogy 3 oszlopot képezünk az egyesek számának

megfelelően, ezek mindegyikét 5 oszlopra bontjuk a tízesek szerint és két sorba választjuk a számokat a százasként:

600	620	640	660	680	604	624	644	664	684	608	628	648	668	688
800	820	840	860	880	804	824	844	864	884	808	828	848	868	888

2. Az első oszlop beírt számaiban közös, hogy a százasként helyén 2 áll, a második oszlopban 5, a harmadikban 6. Az első sorokban 2 tízes van mindegyik számban, a 4., 5. és 6. sorban 5 tízes, a 7., 8. és 9. sorban pedig 6. Ha mindegyik üres helyre beírjuk a százasként és tízesek számát eddigi megfigyeléseink szerint, akkor a baloldali táblázat áll előttünk:

222	522	62
22	525	62
2	5	6
25	55	652
25	55	655
256	55	65
26	562	66
2	5	6
26	56	666

222	522	622
225	525	625
226	526	626
252	552	652
255	555	655
256	556	656
262	562	662
265	565	665
266	566	666

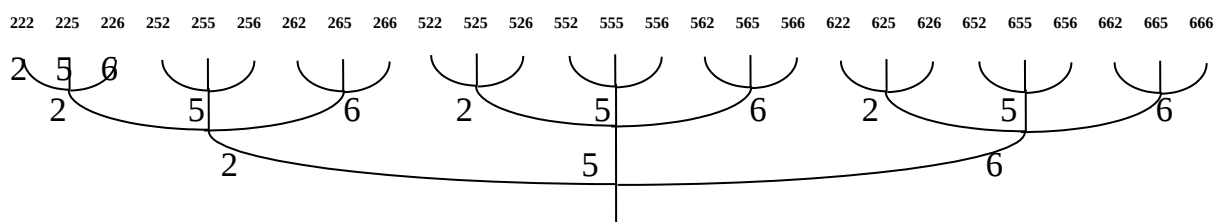
Talán még jobban kirajzolódik így a táblázat szerkezete: sejtjük, hogy az első három, a 4-6. és a 7-9. sor tartozik össze azonos szempont szerint: aszerint, hogy mi áll a tízesek helyén. A három összetartozó sor egy oszlopában csak az egyesek száma különbözik: egymás alatt áll a 2, 5 és a 6. és 9. sorban a 6. Ezekkel is kiegészítve kapjuk a kész táblázatot (jobb oldali).

A táblázat úgy lehet más, ha pl. a százasként szerint sorokba válogatjuk a számokat, és a tízesek és egyesek szerint az oszlopok választják szét őket.

A feladat így szólhatott:

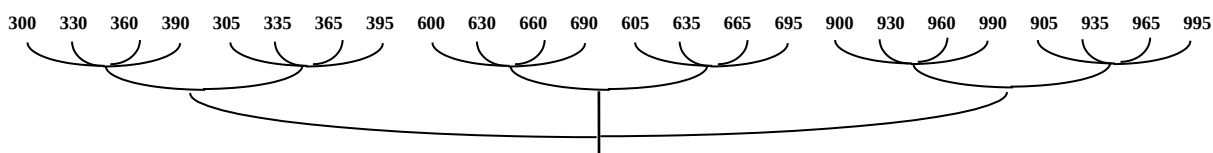
„Alkosd meg az összes háromjegyű számot, amelyet ki lehet rakni a 2, 5 és 6 számjegyek felhasználásával!”

Fadiagram:



(Ha növekvő sorrendet akarunk létrehozni, akkor az alsó ágak a százaskok száma szerint rendezik nagyság szerint növekvő rendbe a számokat: a baloldali ágon lesznek a 2-vel kezdődő számok, a középső nagy ágon az összes, amely 5-tel kezdődik, a jobboldali nagy ágra kerül minden szám, amelyben 6 százask van. A következő elágazás – mindegyik nagy ág végén – a tízesek száma szerint válogatja az ide tartozó 9 számot, s ezek végén az egyesek száma szerint rendezik sorba a 3-3 számot a harmadik elágazás.)

3.



A feladat szólhatott pl. így:

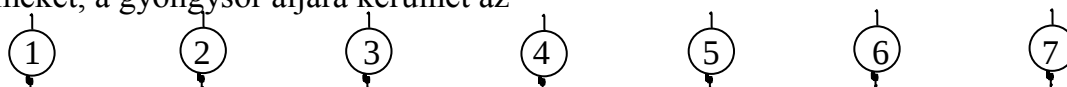
„Alkosd meg az összes 5-tel osztható háromjegyű számot, amelyben a százaskok és a tízesek helyén 3-mal osztható szám áll!” (Tudni kell persze hozzá, hogy a 0 osztható 3-mal, mint bármely más – 0-tól különböző – egész számmal, és azt is, ha a 0-t írjuk a százaskok helyére, akkor az már nem háromjegyű szám.)

Táblázat lehet pl.

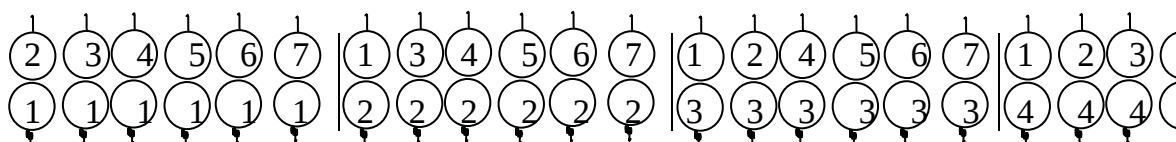
		<i>Utolsó számjegye 0</i>				<i>Utolsó számjegye 5</i>			
		<i>A tízesek helyén álló számjegy</i>				<i>A tízesek helyén álló számjegy</i>			
		0	3	6	9	0	3	6	9
<i>Első számjegye</i>	3	300	330	360	390	305	335	365	395
	6	600	630	660	690	605	635	665	695
	9	900	930	960	990	905	935	965	995

4. Gyöngyfűzések

a) 7 különböző színű gyöngyszem közül elsőnek felfűzhetem bármelyiket: 7-féle választási lehetőségem van. A színek kezdőbetűi helyett megszámozva pl. a gyöngyszemeket, a gyöngysor aljára kerülhet az



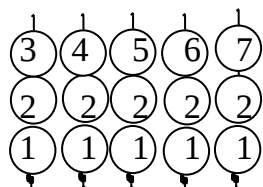
Bármelyiket fűztem fel elsőnek, 6 szem van még a tálban előttem; a második gyöngyszem megválasztására mindig 6-féle lehetőségem van:



A 4.-re is 6, az 5.-re is 6, a 6.-ra és a 7.-re is 6 féle gyöngyöt fűzhetek. Mind a 7-féle első gyöngyszemre másodikként felfűzhetem a többi 6 bármelyikét: tehát 7·6-féleképpen kezdhető a gyöngysor 2 szem felfűzésével.

Bárhogyan választottam is meg az első két gyöngyszemet, még mindig 5 szem van előttem, mindegyik gyöngysort 5-féleképpen folytathatom a harmadik gyöngyszem megválasztásával.

Például nézzük azokat a gyöngysorokat, amelyekben az első és második gyöngyszem az 1-es és 2-es:



Szintén 5-féleképpen folytatható a fűzés, ha az 1-es és 3-as az első kettő, akkor is, a az 1-es és a 4-es van alul ... és akkor is, ha a 7-es és a 6-os volt az első két szem, amit fűztem.

Ez pedig azt jelenti, hogy mind a 7·6-féle kétszemes gyöngysoromat 5-féleképpen folytathatom 1 további szem felfűzésével, tehát a 7 szemből 7·6·5-féle 3-szemes sor fűzhető.

Hasonlóan gondolható végig, hogy a negyedik szem megválasztására – az első három felfűzése után – mindig 4-féle lehetőség van, tehát 4-szemű gyöngysor 7·6·5·4-féle lesz, az ötödik szemet már csak 3-féleképpen választhatom, tehát 5-szemes sorból 7·6·5·4·3-félét lehet készíteni... 6-szemesből 7·6·5·4·3·2-féle lesz, és az utolsó szem felfűzésére már nincs választási lehetőség: ez 1-szerezi, azaz változatlanul hagyja a lehetőségek számát.

Ezt a szorzatot – a tényezők növekvő sorrendbe állítása után – $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ alakban szoktuk írni. Rövid jelölése a $7!$ (olv.: 7 faktoriális). Ha 1-től kezdve a természetes számokat 2-ig, 3-ig, 4-ig..., n-ig összeszorozzuk, ezek a $2!$, $3!$, $4!$, ... $n!$

$$1! = 1$$

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$9! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 362\,880$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

$$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3\,628\,800$$

Minden n-re igaz, hogy $n! = (n-1)! \cdot n$.

Feladatunkban tehát 5040 különböző gyöngysort készíthetünk.

Ha a felfűzött gyöngysorok bármelyikét megfordítjuk, akkor egy másik gyöngysor lesz belőle. Pl. ebből a gyöngysorból:



ez lesz:



Vajon ez új lehetőség, vagy ott van az 5040 között?

Azt kell vizsgálni, hogy ebben a megfordított sorban hogyan következnek egymás után a szemek. Alulra került a 6-os – tehát azok között az eredeti sorok közt keressük. Van köztük olyan, amelynek a második gyöngyszeme az 5-ös, hiszen 6-féleképpen folytattuk azt a sort is, amely a 6-ossal kezdődött. A 6-os, 5-ös kezdetűek között ott van az is, amelyben a harmadik szem a 3-as, ..., így tovább egyenként megvizsgálva a szemeket, kiderül, hogy megvan a fenti gyöngysor fordítottja.

Ez pedig azt jelenti, hogy ha igazi gyöngysorokra gondolunk, amiket nem függőlegesen tartunk a kezünkben, hanem letesszük, aztán újra felvesszük valahogyan, akkor ezt a két gyöngysort nem különböztetjük meg. Mindegyik gyöngysornak van egy párja, amelyben éppen fordított sorrendben vannak a szemek. Ha az irány nem fontos, akkor 2570 különböző gyöngysort tudunk készíteni.

- b) Fűzzük fel először azt a négy gyöngyszemet, amelyik nem piros! Ezt – az a) feladat gondolatmenete szerint – $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 (=4!)$ -féleképpen tehetjük.

Vegyünk most ezek közül egy gyöngysort, és gondoljuk meg, hogy hányféleképpen fűzhetők bele a pirosak anélkül, hogy a négy gyöngyszem egymáshoz való viszonyát, sorrendjét változtatnánk.

Pl. legyen a négy szem sorrendje fkzs. A pirosak helye ilyen lehet:

		(f)		(k)		(z)		(s)	
1.	p p p								
2.	p p		p						
3.	p p				p				
4.	p p						p		
5.	p p								p
6.	p		p p						
7.	p		p		p				
8.	p		p				p		
9.	p		p						p
10.	p				p p				
11.	p				p		p		
12.	p				p				p
13.	p						p p		
14.	p						p		p
15.	p								p p
16.			p p p						
17.			p p		p				
18.			p p				p		
19.			p p						p
20.			p		p p				
21.			p		p		p		
22.			p		p				p
23.			p				p p		
24.			p				p		p
25.			p						p p
26.					p p p				
27.					p p		p		
28.					p p				p
29.					p		p p		
30.					p		p		p
31.					p				p p
32.							p p p		
33.							p p		p
34.							p		p p
35.									p p p

A pirosakat persze nem különböztetjük meg egymástól. A másik négyhez képest 35-féleképpen tudunk elhelyezni 3 pirosat. Ez akkor is igaz, ha a különböző négy más, akármilyen sorrendben állnak: mind a 24-féle sorrend esetén 35-féle módon fűzhetők eléjük, közéjük vagy utánuk a pirosak: ez tehát 840-féle gyöngysort jelent.

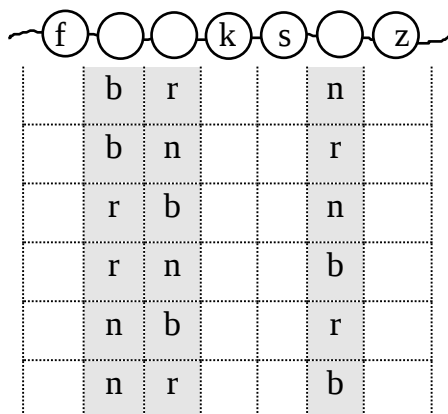
Másik megoldás:

Úgy is gondolkodhatunk, hogy az a) feladatban meghatározott lehetőségekből indulunk ki. Azt nézzük meg, hogy egy gyöngysor mely a) feladatbeli gyöngysorokból származtatható.

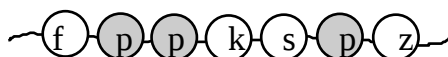
Például ott a fehér, kék, sárga, zöld gyöngyök mellett bordó, rózsaszínű és narancssárga volt. A hét különböző színű gyöngyöt 5040 sorrendbe fűzhettük.

A b) feladat kicserélte a *b*, *r*, *n* gyöngyszemet pirosra. Most tehát azok a gyöngysorok ugyanolyanná váltak, amelyekben csak a *b*, *r*, és *n* cserélődött egymással, a másik négy egy helyben marad.

Például:



Mind a hatból ez a gyöngysor lesz:



Ha a négy nem piros gyöngy máshová kerül – például a 2., 4., 6. és 7. helyre – bármilyen sorrendben, akkor a fennmaradó három (1., 3., 5.) helyen szintén 6-féle sorrendben elhelyezhető *b*, *r* és *n* cserélődik pirosra; ebből a hatból ismét 1 lesz. Egy-egy gyöngysor (a *b* feltétel szerint) 6 különböző gyöngysort fog össze azok közül, ahol mind a 7 más színű volt. Tehát itt hatod annyi lehetőség különböztethető meg: $5040/6=840$.

Általában úgy mondhatjuk, hogy annyi különböző sorból lesz ugyanaz az egy, ahányféleképpen sorrendezhetők az egyezővé váló gyöngyszemek. Ha csak 2 gyöngyszemet cserélünk ki azonos színűre, akkor 2-féle sorrendben állhat ugyan ezen a két helyen az azonos színű; ezeket nem lehet megkülönböztetni; $5040/2=2520$ a lehetőségek száma. Ha 4 azonos színű lesz, ezeket – ugyanazon a négy helyen – $4! = 24$ -féle sorrendben helyezhetjük el, tehát 24-24 eset válik egymástól megkülönböztethetatlenné az 5040 közül; $5040/24 = 210$ a különböző gyöngysorok száma, ...

- c) A b) feladat második gondolatmenetét alkalmazva egymás után háromszor (úgy, hogy először pl. 3 különbözőt változtatunk azonos színűre, aztán újabb 2-t más egyező színűre és végül a maradék 2-t is egyre) kapjuk, hogy

$$\frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{5040}{6 \cdot 2 \cdot 2} = 210$$

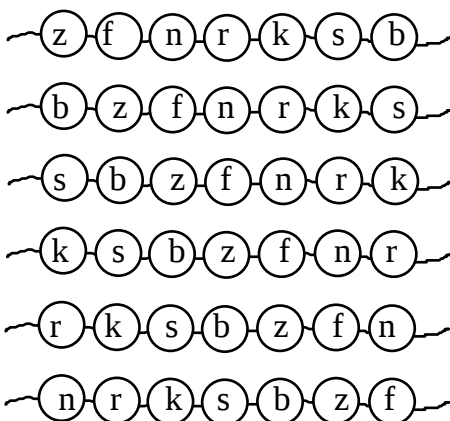
- d) Szintén a b) feladatban felhasznált második gondolatmenet szerint

$$\frac{7!}{3! \cdot 3!} = \frac{5040}{6 \cdot 6} = 140 \text{ a gyöngysorok száma.}$$

5. Körbefutó gyöngyszemek esetére gondoljuk meg ismét azt, hogy hány 7-szemű gyöngysor válik megkülönböztethetetlené az összekötés után. Például legyen a 4)a egyik gyöngysora:



Ha ezt a gyöngysort összekötjük úgy, hogy körbefuthatnak a szemek, akkor mindegyik gyöngyszem után ugyanaz következik, mint itt, csak még a zöld után is következik egy szem: a fehér. De ugyanez lesz a sorrend két-két szomszédos gyöngyszem között akkor is, ha ezeket a gyöngysorokat kötjük körbe:



Így 7 olyan gyöngysor válik azonos körbefutó lánczá; az eredeti 5040 gyöngysorból $5040/7=720$ különböző lánc lesz.

Úgy is meggondolhatjuk, hogy egy gyöngyszemet megfogunk, és csak azt vizsgáljuk, hogy ettől indulva a többi 6 hányféleképpen sorrendezhető. A láncok számát tehát a $6! = 720$ alakban kapjuk.

A többi részfeladatban – hasonló gondolatmenettel – így alakul a lehetőségek száma:

b) $840/7 = 120$

c) $210/7 = 30$

d) $140/7 = 20$

Megjegyezzük, hogy a 4)b, c, d és 5. feladat számai mind a „lerajzolt” esetekre vonatkoznak, amikor ugyanis nincs módunk a gyöngysort a túlsó oldalról nézni, nem tudjuk átfordítani. Valóságos gyöngysorok, láncok azonban nem különböznek a „tükörképüktől” ezek páronként megkülönböztethetetlenek egymástól, ezért a felsorolt számoknak éppen a fele lesz a ténylegesen megkülönböztethető gyöngysorok, láncok száma.

(Érdeemes elkészíteni pl. celofánra rajzolva legalább azt a 10 láncot, amelyet az 5)d feladatban megkülönböztethetünk!)

6. a) Kéttagú összeadáshoz az első tagot 4-féleképpen választhatjuk meg, de szintén 4-féleképpen a másodikat is. Ugyanis nincs olyan megkötés, hogy nem használhatnánk fel egy számot kétszer is. (Ebből a szempontból más lenne a feladat, ha 4 számkártyával – és az összeadás jelével – kirakható összeadásokról lenne szó.)

Ez tehát $4 \cdot 4 = 16$ lehetőség. (Írja le az összezt rendezetten! Készíthet hozzá fadiagramot is!)

Ha majd nem különböztetjük meg azt a két-két összeget, amelyekben ugyanaz a két szám megcserélt sorrendben szerepel, akkor a 4 egyenlő tagú összeg mellett a 12 különböző tagúból 6 lesz (pl. a $4+9$ és a $9+4$ ugyanaz az összeg). Így a különböző összegek száma $4+6=10$.

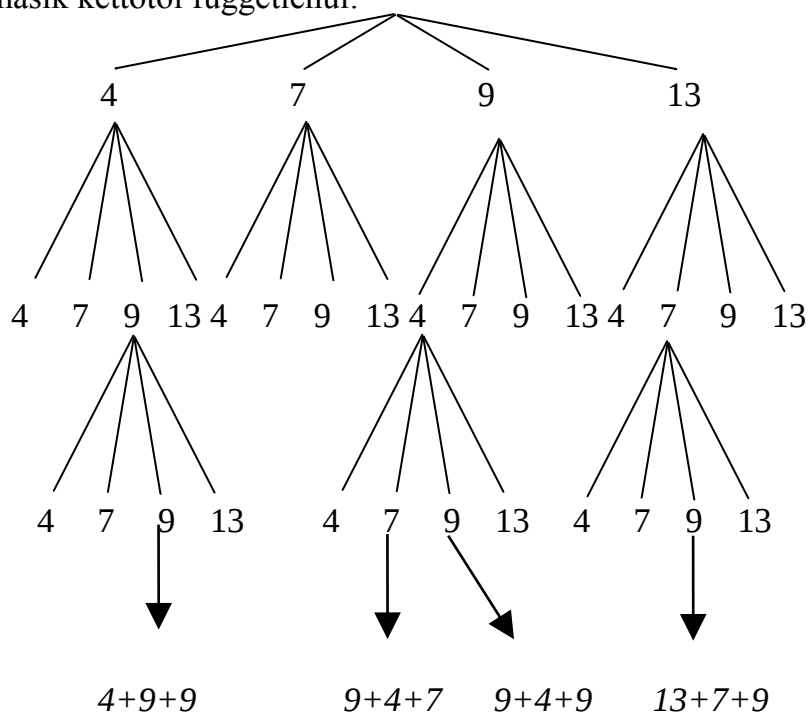
- b) Ha fontos a sorrend (azaz megkülönböztetünk két összeget akkor is, ha ugyanazok a tagok más sorrendben szerepelnek), akkor mindhárom tagot 4-féleképpen választhatjuk meg a másik kettőtől függetlenül:

Az első tag 4-féle lehet:

A második 4-féle akkor is, ha az első 4, akkor is, ha 7, 9, vagy 13:

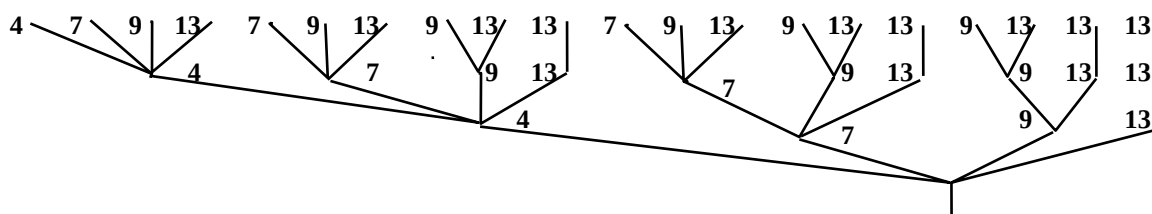
A harmadikat szintén 4-féleképpen választhatjuk, akármilyen az első kettő. Példaként csak két helyen rajzoljuk meg a fa továbbágazását:

Ezeket az összeadásokat olvashatjuk le pl.:



A lehetőségek száma tehát $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

Ha nem engedjük meg egy összeadásban, hogy bármely két szám csökkenő sorrendben kövesse egymást, ez azt jelenti, hogy bármelyik számhármass megválasztása esetén csak egy sorrendet veszünk figyelembe. A fenti fadiagram módosul. Az az ág, amely a 13-at képviseli, már sehol nem ágazik tovább. A 9-es ág csak 9-cel és 13-mal folytatható, a 7-es 3-felé ágazik, s csak a 4-es ágazik 4-felé. Az ágvégződéseket össze-számlálva: 20 esetet tudunk megkülönböztetni.



- c) $4^4 = 256$; illetve csak növvő sorrendet megengedve: 40. (Ez utóbbit a fadiagram folytatásával lehet megszámlálni. Az utolsó ágvégződések közül a 13 csak 1-féleképpen folytatható, a 9 kettő-, a 7 három- és a 4 négyfelé ágazik.)
- d) 10 (mint a 2-tagú összeadások száma, ha a tagok felcserélése nem jelent új lehetőséget.) Köztük persze lesznek azonos különbségek, azaz egyenlő eredményű kivonások: $4-4=7-7=9-9=13-13$.
- e) Itt – a mintaként megfogalmazott példák szerint – más esetnek vesszük, ha ugyanazt a kivonást és ugyanazt az összeadást végezzük más sorrendben. (Ezt az indokolhatja, hogy maga a számítás más lesz.)

Gondolkodjunk most a következőképpen:

Képezzük először az összes lehetséges kivonást (azzal a megkötéssel, amit a d) mond ki). Erre összesen 10 különböző lehetőségünk van.

1. Ehhez a különbséghez hozzáadhatjuk bármelyik számot akár úgy, hogy a kisebbítendő elé írjuk azt, amit hozzáadunk (ez megnégyszerezi az eddigi 10 lehetőséget), akár úgy, hogy a kivonandó után írjuk (ez újra $4 \cdot 10$ lehetőséget ad). Ezzel megkapjuk az összes olyan esetet, ahol a kivonásban szereplő szomszédos két szám közül az első nem kisebb a másodiknál.
2. Ha a kisebbítendő és kivonandó közé írjuk a hozzáadandó számot (úgy gondolva, hogy az első számot megnöveljük vele és ebből az összegből vesszük el a kivonandót, akkor olyan esetekhez is eljuthatunk, amelyek nem szerepelhetnek a fenti 80 eset között: ahol az összeadás második tagja kisebb a kivonandónál, de az összeg nem kisebb. Ezek az esetek a következők:

$4+4-7$	$4+4-9$	$4+4-13$
$7+4-7$	$7+4-9$	$7+4-13$
$9+4-7$	$9+4-9$	$9+4-13$
$13+4-7$	$13+4-9$	$13+4-13$
	$4+7-9$	$4+7-13$
	$7+7-9$	$7+7-13$
	$9+7-9$	$9+7-13$
	$13+7-9$	$13+7-13$
		$4+9-13$
		$7+9-13$
		$9+9-13$
		$13+9-13$

Ez még 24 új eset. Összesen tehát 104 különböző művelet sor írható az előírásnak megfelelően.

8. Mind a hat tárgyból kétféle év végi osztályzat lehetséges (feltéve, hogy csak a beírt érdemjegyek számítanak hozzá). Vagy 5-öst vagy 4-est fog kapni mindegyikből, a többitől függetlenül.

Számozzuk meg a tárgyakat! A magyar kapja az 1-es sorszámot, a matematika a 2-est, a környezetismeret a 3-ast, ének – 4, testnevelés – 5, rajz – 6.

1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
5	5	5	5	5	5	4	5	5	5	5	5
5	5	5	5	5	4	4	5	5	5	5	4
5	5	5	5	4	5	4	5	5	5	4	5
5	5	5	5	4	4	4	5	5	5	4	4
5	5	5	4	5	5	4	5	5	4	5	5
5	5	5	4	5	4	4	5	5	4	5	4
5	5	5	4	4	5	4	5	5	4	4	5
5	5	5	4	4	4	4	5	5	4	4	4
5	5	4	5	5	5	4	5	4	5	5	5
5	5	4	5	5	4	4	5	4	5	5	4
5	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5
5	5	4	5	4	4	4	5	4	5	4	4
5	5	4	4	5	5	4	5	4	4	5	5
5	5	4	4	5	4	4	5	4	4	5	4
5	5	4	4	4	5	4	5	4	4	4	5
5	5	4	4	4	4	4	5	4	4	4	4
5	4	5	5	5	5	4	4	5	5	5	5
5	4	5	5	5	4	4	4	5	5	5	4
5	4	5	5	4	5	4	4	5	5	4	5
5	4	5	5	4	4	4	4	5	5	4	4
5	4	5	4	5	5	4	4	5	4	5	5
5	4	5	4	5	4	4	4	5	4	5	4
5	4	5	4	4	5	4	4	5	4	4	5
5	4	4	5	5	5	4	4	4	5	5	5
5	4	4	5	5	4	4	4	4	5	5	4
5	4	4	5	4	5	4	4	4	5	4	5
5	4	4	5	4	4	4	4	4	5	4	4
5	4	4	4	5	5	4	4	4	4	5	5
5	4	4	4	4	5	4	4	4	4	5	4
5	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5
5	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

Aki a két nagy oszlopba elrendezett táblázat rendjét megfigyeli, észreveheti, hogy pl. a 4-esek elhelyezkedése éppen olyan, mint a kettes számrendszerben sorban leírt természetes számokban az 1-eseké. Ez természetes is, hiszen itt is minden helyre 2-féle jel kerülhet, mint ott. Hat hely éppen 64 szám leírására elegendő a kettes rendszerben; itt is 64-féle megoldást találtunk.

(Talán még szemléletesebb képet kapunk egy olyan fa-diagrammal, ahol hat szinten vannak az elágazások, minden szinten minden ág kétfelé ágazik aszerint, hogy a következő tantárgyból 5-öst vagy 4-est kap-e Zoltán.)

Másik gondolatmenet:

Lehet mindegyik tárgy 5-ös.

Lehet egy 4-es, a többi 5-ös; de ez 6-féleképpen lehetséges: aszerint, hogy a hat tárgy közül melyik az az egy, amelyik 4-es.

Lehet két 4-es; erre 15-féle lehetőség van. Megszámozva a hat tárgyat, ezek a következők: 12, (értsd: az 1. és a 2. tárgy 4-es), 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56.

Lehet három 4-es; ez 20-féleképpen történhet: 123, 124, 125, 126, 134, 135, 136, 145, 146, 156, 234, 235, 236, 245, 246, 256, 345, 346, 356, 456.

Lehet négy 4-es. Ez ugyanaz a 15 eset, mint amikor két 5-ös van. Két 5-ös ugyanazonokon a helyeken lehet, mint amiket a két 4-esnél soroltunk.

Lehet öt 4-es; ez éppen az a 6 eset, amikor egy 5-ös van, s végül lehet hat 4-es; ez éppúgy 1 lehetőség, mint a hat 5-ös.

Tehát $1+6+15+20+15+6+1=64$ -féleképpen alakulhat a bizonyítványban a hat tárgy osztályzata.

9. (Foglalkozzunk most csak a 13 mérkőzéssel; a plusz egyet, a 14.-et hagyjuk figyelmen kívül.) A totószelvény első helyére 3-féle jelet lehet írni: 1, 2 vagy X. A második helyre akkor is 3-féle jel kerülhet, ha az első jel 1, akkor is, ha az 2 és akkor is, ha az első helyre X-et írtunk. Ez tehát már $3 \cdot 3$ lehetőség. A harmadik sorba ismét 3-féle jel kerülhet, bármi áll is az első két helyen, és így tovább: minden további sor kitöltése megháromszorozza a lehetőségek számát. Így a 13 sort $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{13}$ -féleképpen lehet kitölteni. (Ez 1 594 323.) Ha ennyi szelvényt vásárolnánk, és mindegyiket különféleképpen töltenénk ki, akkor biztosan lenne, mégpedig pontosan 1 telitalálatos szelvényünk. (Ha a +1 mérkőzést is figyelembe vesszük, akkor ugyan még háromszor ennyi kitöltés lenne lehetséges, de a szokásos értékelés szerint csak az a kettő lenne 13-as, ahol az első 13 sort a mérkőzések eredményeinek megfelelően töltöttük ki, viszont a 14.-et nem. Ha ez is „találat”, akkor ezt 13+1-es szelvénynek mondjuk.)

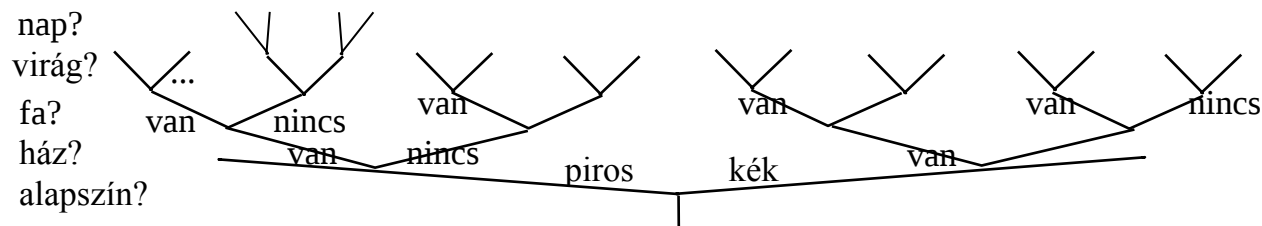
*12 találat azokon a szelvényeken van, ahol csak 1 helyre került más jel, mint kellett volna a telitalálatához. Ha pl. az 1-es sorszámú mérkőzés eredménye 1-es, erre a helyre a 2-est vagy az X-et írjuk – miközben a többi eredményt eltaláltuk. Hasonlóan 12 találatunk van, ha a második mérkőzés eredménye helyett valami másra tippeltünk (pl. az X helyett írtunk 1-est vagy 2-est), de az összes többi helyen eltaláltuk az eredményt. Így tovább: 13 helyen lehet egyet tévedni, mindegyik helyen két-féleképpen ronthatunk, ez tehát $13 \cdot 2 = 26$ szelvényt jelent.

Amennyiben a +1-es mérkőzésre is minden lehetséges módon tippeltünk, azaz 3^{14} -féle szelvényt töltöttünk ki, akkor éppen 3 olyan szelvény lesz, amelyen ugyanazon a helyen ugyanúgy tévedtünk az első 13 sor közül, tehát $3 \cdot 13 \cdot 2 = 78$ szelvény fizet 12-est.

10. Egy-egy lap elkészítésekor a következő döntéseket kell meghozni:

- piros vagy kék legyen az alap?
- legyen rajta ház, vagy ne legyen?
- legyen rajta fa, vagy ne legyen?
- legyen rajta virág, vagy ne legyen?
- legyen rajta nap, vagy ne legyen?

Mindegyik kérdésről 2-féleképpen lehet dönteni az előbbiektől függetlenül, ezért 5 szinten, mindig kétfelé ágazó fa mutatja a lehetőségek számát. (A diagram elkészítése legyen az olvasó dolga: itt csak elkezdjük a fa megrajzolását:)



32 lapból fog állni a készlet.

11. Legalább 1-gyel több, mint ahány különböző 6-jegyű szám van, mivel 0-val kezdődő telefonszámot nem adtak ki. Az első helyre lehet tenni az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 bármelyikét (ez 9 lehetőség), a második helyre mindezt és még a 0-t is (tehát az első két helyet 90-féleképpen lehet kitölteni). A harmadik és minden további helyre ismét mindig 10-féle számjegy kerülhet függetlenül attól, hogy előtte milyen számjegyek állnak, tehát minden hely megtízszerezi a lehetőségek számát. Így pontosan 6-jegyű szám $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 900\,000$ van. Ha ennyi előfizető lenne, akkor elegendő lenne a 6 jegy a telefonszámokhoz. Ha már 1-gyel többen vannak, akkor szükséges a 7 jegyre áttérni. (A gyakorlatban bizonyára egy kis idővel hamarabb megtörtént az áttérés.)

Hasonló megfontolással a 8-jegyű telefonszámokra akkor kell áttérni, amikor az előfizetők száma legalább 9 000 001 lesz.

Másik gondolatmenet:

0-tól 999 999-ig éppen 1 000 000 természetes szám van. Ezek a számok azonban nem mind 6-jegyűek, hanem „legfeljebb hatjegyűek”. Ennyi számot kellene leírunk akkor, ha pontosan 6 helyet szeretnénk kitölteni akkor is, ha az első helyre 0-t kellene írunk, azaz, ha nem 6-jegyű, hanem 1-, 2-, 3-, 4- vagy 5-jegyű számot képeznénk. (Pl. a 673 helyett 000 673-at, az 54 798 helyett 054 798-at írnánk.) A millió szám között azonban azok, amik 0-val kezdődnek, nem tartoznak bele a feladatunk megoldásába, tehát a 6-nál kevesebb jegyű számok számát el kell vennünk belőle. Ezek a számok 0-tól 99 999-ig tartanak, ami 100 000 szám. A pontosan 6-jegyűek száma tehát $1\,000\,000 - 100\,000 = 900\,000$. (A legfeljebb hatjegyűeknek és a legfeljebb ötjegyűek különbsége.)

12. Gondoljuk azt, hogy csak 26 különböző betűt használnak a rendszámokban. Amikor két betűjelet írnak egymás mellé, akkor az első helyre 26-féle betű közül választhatnak, s bármi is az első jel, a másodikat is 26-féleképpen választhatják. A

betűjelekre tehát $26 \cdot 26$ lehetőség volt. A következő négy hely mindegyikét a $0 \dots 9$ számjegyek valamelyikével töltötték ki, megengedve itt a 0-val való kezdést is. Ez azt jelenti, hogy minden további hely megtízszerezi a lehetőségek számát: azaz a régebbi rend szerint $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ gépkocsit lehetett megkülönböztetni rendszámokkal.

Amikor áttértek a 3 betűjelből és 3 számjegyből álló rendszámra, akkor – hasonló megfontolással – $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ -re változott a lehetőségek száma.

A két szám különbsége: $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 - 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$. A közös tényezők kiemelése után ez a különbség $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot (26 - 10)$ formára hozható, tehát a lehetőségek számának növekedése $16 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,816\,000$.

Ha a betűpáros mellett 5-jegyűre változtatták volna a szám-csoportot, akkor a növekedést a következő különbség adja meg:

$$26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 - 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10.$$

Ez pedig $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot (10 - 1) = 9 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 6\,084\,000$.

Ha 3 betűből és utána 4 számjegyből állna a rendszám, akkor így alakulna a lehetőségek száma $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$, s ez $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 - 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ különbséggel való növekedést jelentene.

Ez pedig $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot (26 - 1) = 169\,000\,000$.

Ha a kitölthető helyek száma nem növelhető: 6 helyre lehet betűt vagy számjegyet írni, akkor azáltal növelhető tovább a lehetőségek száma, ha a betűk számát növeljük a számjegyek számának rovására.

13. Ha a négy számkártya mindegyikén különböző számjegy állna, (például 1, 3, 4 és 5), akkor az elsőt négyféleképpen választhatnánk meg, Mellé, a második helyre már csak 3-féle kártya közül választhatunk egyet, bármelyik számjegyet is tettük az első helyre. A harmadik helyre mindegyik kezdés esetén 2 kártya közül tehetünk ki egyet, s az utolsó hely kiöltésére már nincs választás: egyetlen kártyánk van, azt kell az utolsó helyre tenni. Ez $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ lehetőség.

Azonban két kettős van a készletben. Képzeljük azt, hogy az előbbi négy közül cseréltük le az 1-est és a 4-est 2-esre! Bármelyik két négyjegyű számból, amelyben csak az 1-es és a 4-es cserélt helyet, ugyanaz a négyjegyű lesz a 2, 2, 3, 5 jegyekkel, hiszen a két 2-es felcserélése nem hoz új lehetőséget. (Például az 1534-ből és a 4531-ből egyaránt 2532 lesz.) Ezért a lehetőségek száma megfeleződik: 12 különböző négyjegyű számot lehet kirakni.

Mielőtt leírnánk az összes ilyen számot, megfontolhatjuk, mennyi lesz a tizenkét négyjegyű szám összege. Ha egy helyre – pl. az első helyre – kitesszük az egyik 2-est, akkor a másik három hely kitöltéséhez 3-féle számkártya áll rendelkezésre. Ezt a 3 helyet az összes lehetséges módon kitöltjük, erre $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ -féle lehetőségünk van. Ez lesz az a 6 szám, amelyben az első helyen a 2-es áll. Hasonlóan igaz, hogy ha a második, harmadik vagy negyedik helyre tesszük le a 2-est, a többi helyet 6-féleképpen tölthetjük ki. Ez azt jelenti, hogy a 12 négyjegyű szám olyan lesz, hogy

a 2-es hatszor fog szerepelni bennük mindegyik helyen. Ha azonban a 3-ast (vagy az 5-öst) tesszük le valamelyik helyre, akkor a fennmaradó három helyet a két 2-essel és az 5-össel (3-assal) csak 3-féleképpen lehet kitölteni (pl. 225, 252, 522 sorrendben). Tehát bármelyik helyen csak háromszor fog állni a 3-as és ugyanígy az 5-ös.

Egy-egy helyen tehát $2+2+2+2+2+2+3+3+3+5+5+5 = 6\text{-szor } 2 + 3\text{-szor } 3 + 3\text{-szor } 5 = 36$ lesz az összeg ebben a 12 tagú összeadásban. Ez az egyesek helyén $36 \cdot 1$ -et, a tízesek helyén $36 \cdot 10$ -et, a százaskok helyén $36 \cdot 100$ -at és az ezresek helyén $36 \cdot 1000$ -et ér; összesen $36 \cdot 1111$ -et, 39 996-ot.

Most már soroljuk fel a számokat növekvő sorrendben:

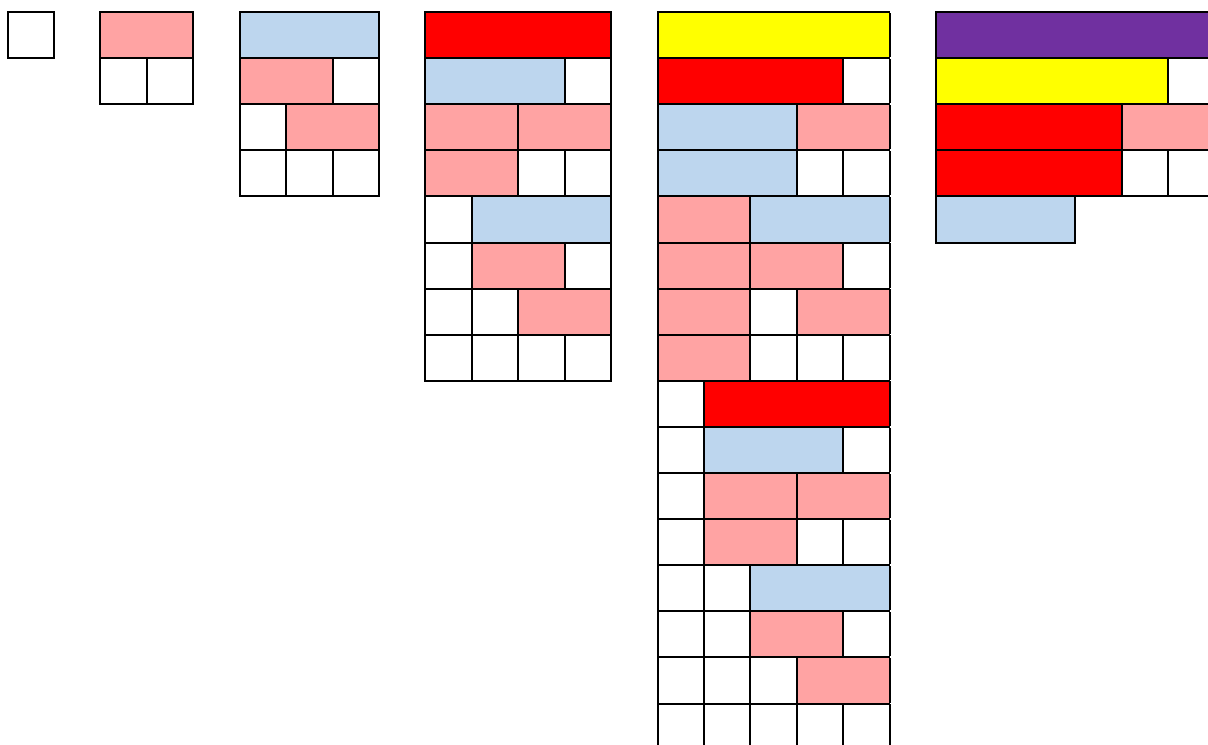
2235, 2253, 2325, 2352, 2523, 2532

3225, 3252, 3522, 5223, 5232, 5322

(Helyes és hasznos ellenőrizni mindent, amiket előzetesen meggondoltunk!)

14. Igen jellegzetes kombinatorikus kérdés! Nem azt kérdezi a feladat, hogy pl. a piros rúd hányféleképpen szőnyegezhető, vagy a citromsárga, hanem „a színesrudak”. Nem alsó tagozat elején, de már 4-5. osztályban érdemes úgy kérdezni, hogy kis kutatás nőhessen ki belőle! Most ugyanis a választ egy kis táblázat fogja megadni, s talán éppen a kis számok körében jól felismerhető összefüggés sejteti meg az általánosítható választ.

Rakjuk ki a kisebb rudakat, ahányféleképpen lehet!



Összegyűjtve az eddigi esetek számát:

ezt a rudat	fehér	rózsaszín	v. kék	piros	c. sárga
ennyiféleképpen lehet kirakni	1	2	4	8	16

Az eddig elvégzett kirakásokban mindig csökkenő sorrendet követtünk. Elsőnek a leghosszabb rudat tettük ki, aztán a következő méretűt, amit a fehérrel egyféleképpen lehetett megtoldani, aztán a harmadik hosszúságú rudat tettük a sor elejére, amit 2 centivel kellett megtoldani, de erre már kétféle lehetőségünk volt, aztán a következőhöz 3 cm-t kellett tenni, s ezt annyiféleképpen tehetjük, ahányféleképpen a 3 cm-es világoskékkel ki lehetett rakni és így tovább. Ez a rend azt mutatja, hogy pl. a lilát 1-gyel többféleképpen lehet kirakni, mint az összes nála kisebbet: $1+1+2+4+8+16=32$ -féleképpen. Sejtésünk az lehet, hogy ez az összeg éppen mindig kétszerese az előző egyetlen számnak. (Valóban meggondolható, hogy ha a kettes számrendszerben olyan számhoz adunk még 1-et, amelyben jobbról kezdve mindegyik helyen 1 áll, akkor kapjuk azt a számot, amely 1-gyel több számjegyből áll, az első számjegye 1, a többi 0.)

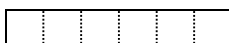
Egy másik megfigyelésünk lehet az, hogy egy rúd kirakásainak első soraiban nem fehérrel kezdődnek a sorok, a második felében pedig fehérrel. Ha a sorok elején letakarunk 1 cm hosszú részt, akkor fent is, lent is pontosan megismétlődik az eggyel rövidebb rúd összes szőnyegezése. Mondhatjuk, hogy azokból mindig kétféleképpen tudtunk 1 cm-rel hosszabb rudat készíteni: úgy, hogy az első rudat 1 cm-rel megnyújtottuk, (azaz 1 cm-rel hosszabbra cseréltük), és úgy, hogy elé tettünk egy 1 cm-es (fehér) rudat. És minthogy harmadik választás nincs: egy kirakás vagy fehérnél hosszabb rúddal kezdődik vagy fehérrel, ilyen módon megkapjuk az összes lehetséges kirakást a megelőző rúd kirakásaiból.

Fontos azt is meggondolni, hogy ilyen módon csupa különböző kirakáshoz jutunk-e. Erre a kérdésre igen a válasz: mert ha a megelőző hosszúságú rúd kirakásai mind különbözőek voltak, akkor azok is különböznek egymástól, amelyeket 1 fehér rúdnak a sor elejéhez való hozzátoldásával kapunk. Hasonlóan azok is különböznek egymástól, amelyeket az első rúd megnyújtásával nyertünk. A két csoport kirakásai pedig különböznek abban, hogy az egyiknek az első rúdja fehér, a másiké pedig nem fehér.

Most mondhatjuk ki, hogy a lehetőségek számai az 1-gyel kezdődő kétszerező számsorozat (a narancssárga rúddal bezárólag, hiszen ez után hiányzik a 11 cm-es).

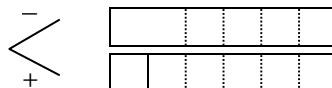
Harmadik meggondolás:

Képzeljük most azt, hogy csupa 6 cm-es hosszú rúdjaik vannak, s ezekből fogunk darabolni minden sort. Tudjuk, hogy összesen 5 helyen lehet vágni (az egész centiméterek helyén). Az összes kirakás megkeresése most azt jelenti, hogy meggondoljuk, hányféleképpen választhatjuk ki a vágási helyeket.

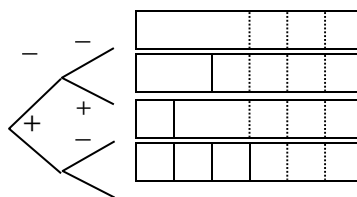


A lehetséges vágások helyei: 1. 2. 3. 4. 5.

Az első helyen kétféleképpen dönthetünk: vagy nem vágunk (–), vagy vágunk (+).



Bárhogy döntöttünk is, a második helyen ismét kétféle döntést hozhatunk: nem vágunk, illetve vágunk:



Hasonlóan mindig megkétszerezi a lehetőségek számát a következő helyekhez kapcsolódó döntésünk, így lesz a lehetőségek száma $2^5=32$.

15. Nem nehéz párhuzamot találni e feladat és a lila rúd szőnyegezései között. A rúd hosszának feleltessük meg a számjegyet, (a citromsárgának pl. az 5-öst, a fehérnek az 1-est ...), a rudak számának a képzendő szám számjegyeinek számát, és rendre megkapjuk a 6-ost, az 5-tel kezdődő egyetlen számot: az 51-et, a 4-gyel kezdődő két számot: a 42- és a 411-et stb. A feltételnek megfelelő számok száma így 32.

A lehetőségek száma szintén a 14. feladat megoldásából olvasható ki. Mégis hasznos lehet – esetleg az ott követett rendtől eltérő rendezésben összegyűjteni ezeket a lehetőségeket:

Ha a számjegyek összege:

1	2	3	4	5	6	... n
1	11	111	1111	11111	111111	123
	2	12	112	1112	11112	132
		21	121	1121	11121	213
		3	211	1211	11211	231
			22	2111	12111	312
			13	122	21111	321
			31	212	1122	222
			4	221	1212	114
				113	1221	141
				131	2112	411
				311	2121	51
				23	2211	15
				32	1113	42
				14	1131	24
				41	1311	33
				5	3111	6
1	2	4	8	16	32	$2^{(n-1)}$

Az **általánosítás** azt jelenti, hogy a megvizsgált egyedi esetekre talált összefüggést elfogadjuk, kimondjuk a többi számra is: bármi legyen is a számjegyek összege (n), mindig a 2-nek ennél 1-gyel alacsonyabb kitevőjű hatványa lesz a lehetőségek száma. Ez azonban nem lesz helyes általánosítás bármilyen n-re, hanem csak 9-ig. Amikor ugyanis a számjegyek összege 10 vagy 10-nél nagyobb szám, akkor egy-egy

helyre 10-et vagy még nagyobb értékű számjegyet kellene írni – ilyen pedig a tízes számrendszerben nincs.

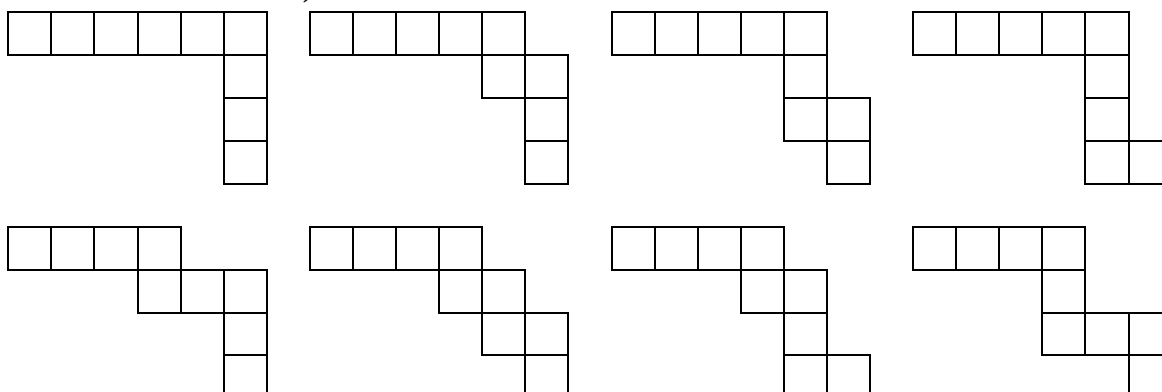
Az általánosítás helyett tehát itt inkább „**kiterjesztésről**” beszélhetünk: azokra az esetekre is érvényesnek sejtjük az összefüggést (9-ig), amiket nem állítottunk elő. Ennek igazolását azonban megtehetjük úgy, hogy a színes rudak szőnyegezésénél alkalmazott harmadik megfontolást – a megelőző számok kétszereződését alkalmazzuk a további esetekre.

Szigorú értelemben a tetszőleges egész hosszúságok szőnyegezésére vonatkozó összefüggés igazolását az jelenti, ha pl. a teljes indukció alkalmazásával minden természetes számra kiterjesztjük és bizonyítjuk a kisebb számokra felismert összefüggést. Ennek az eljárásnak csak a gondolati lépéseit írjuk itt le:

1. Megmutatjuk – pl. a lehetséges kirakások elvégzésével –, hogy kis számokra (1-re, 2-re) igaz a sejtett összefüggés (az 1 cm kirakásainak száma $1=2^0$; a 2 cm kirakásainak száma $2=2^1$.)
2. Feltételezve, hogy valamely n számra fennáll az összefüggés, igazoljuk az összefüggés öröklődését a következő $(n+1)$ természetes számra. (Mint ahogy 1-től kezdődően egyenként lépegetéssel minden – akármilyen nagy – természetes számhoz eljuthatunk, azáltal, hogy ezt az egyenkénti öröklődést megmutatjuk, így igazoltuk az összes természetes számra az első számokra érvényes összefüggést.) Ezt pedig megmutathatjuk a szőnyegezéssel kapcsolatos harmadik gondolatmenet általánosításával: minden következő helyen kétféle döntést hozhatunk a megelőző helyektől függetlenül, ami megkétszerezi a lehetőségek számát. Ha tehát n -re igaz, hogy a lehetőségek száma 2^n , és ezt kétszerezi az 1 cm-rel meghosszabbított csík következő vágási helye, akkor az $n+1$ cm hosszú csík kirakásainak száma $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$, és ez mutatja az öröklődést.
16. Érdemes először valamilyen rendet tartva összegyűjteni az összes leolvasási lehetőséget. Például megtehetjük, hogy a bal felső sarokból kiindulva mindig előnyben részesítjük a jobbra lépést a lefelé lépéssel szemben, azaz mindaddig jobbra lépegetünk mindegyik mezőből, ameddig még van be nem járt lehetőség. (Az első leolvasásokat mutatjuk itt be, ezeknek is csak a helyét jelöljük a mondott rend szerint.)

a)

G	Y	É	M	Á	N
Y	É	M	Á	N	T
É	M	Á	N	T	O
M	Á	N	T	O	K



Az olvasó haszonnal járja végig az összes lehetőség megalkotását; javasoljuk a folytatást! (Annál is inkább, mert a kisiskolást – főképpen az első években – maguk a lehetőségek érdeklik, nem elsősorban a lehetőségek száma!)

A rend megtartása (vagy más rend következetes követése) biztosíthatja, hogy megtaláljuk az összes kiolvasási lehetőséget. Azonban tagadhatatlan, hogy hosszadalmas munkát jelent. Azt is látnunk kell, hogy egy ilyen feladat megoldása csak akkor lesz gazdaságos, ha a következő hasonló feladatok meggondolásában segítséget jelent, ha valamilyen általánosításra el lehet majd jutni belőle.

Az első lépést azzal már meg is tettük az általánosítás felé, hogy a konkrét kiolvasás helyett, a betűk helyett csak a helyüket vettük figyelembe. Azaz kihasználtuk azt a meggondolást, hogy a lehetőségek csak az elrendezéstől függenek, nem az adott helyen álló betűktől. Ha ugyanezen a 6x4-es táblán más szó betűit helyezzük el hasonló módon, a kiolvasások száma nem fog változni.

Most kövessünk végig ismét néhány megoldási módot!

Első meggondolás:

Ne olvassuk végig egy-egy úton a szót, hanem minden mezőbe írjuk be azt a számot, ahányféleképpen oda eljuthatunk a bal felső saroktól kiindulva. Ebben arra a gondolatra támaszkodunk, hogy a felső sor mezőibe csak balról, az első oszlop mezőire csak fentről lehet rálépni, ezért ide mindegyik mezőbe az 1-es kerül. A többi mezőbe pedig kétféle lépéssel juthatunk:

vagy a felette levőből, vagy a bal oldali szomszédjából. Tehát ahányféleképpen eljutottunk a felette levő mezőbe, annyi út lesz, melynek az utolsó lépése egy „le”-lépés, és ahányféleképpen eljutottunk a bal szomszéd mezőbe, annyi olyan út vezet erre a helyre, melynek utolsó lépése egy „jobbra”-lépés.

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56

Ezért a táblázatot kitöltve azt kapjuk, hogy a K betűig 56-féleképpen olvashatjuk ki a szót.

A módszer alkalmazható más elrendezés esetén is; tehát a b) feladat négyzetes elrendezéséből $35+35=70$ -féle leolvasás fog adódni.

Második gondolatmenet:

Figyeljük csak azt, hogy az a) feladatban miféle lépéseket kell tenni! Bármelyik úton haladunk is az előírás szerint, 5-ször kell jobbra lépni és 3-szor le. Azt kell tehát meggondolnunk, hogy 5 egyforma és 3 ezektől különböző de egymással szintén egyforma dolgot (jelet) hányféleképpen lehet sorbarendezeni. Erről viszont már van tapasztalatunk: 8 különböző jelet 8!-féleképpen sorrendezhetünk, ha van köztük 5 egyforma és 3 egyforma, akkor $5!$ -szor és $3!$ -szor számolunk benne minden esetet, ezért a megkülönböztethető esetek száma:

$$\frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$$

A megoldás alapját képező gondolatmenet ismét független a szótól, annak elrendezésétől, hosszától egyaránt; más esetekre is alkalmazható.

Harmadik gondolatmenet

Ismét kicsit más a következő látásmód. Összesen 8 lépést kell megtennünk. Közülük pontosan 3 lépésünk lesz „le”-lépés (a többi esetben jobbra lépünk). Azt kell tehát összeszámlálnunk, hogy a 8 lépés közül hányféleképpen választhatjuk meg a hármat, amikor lefelé lépünk.

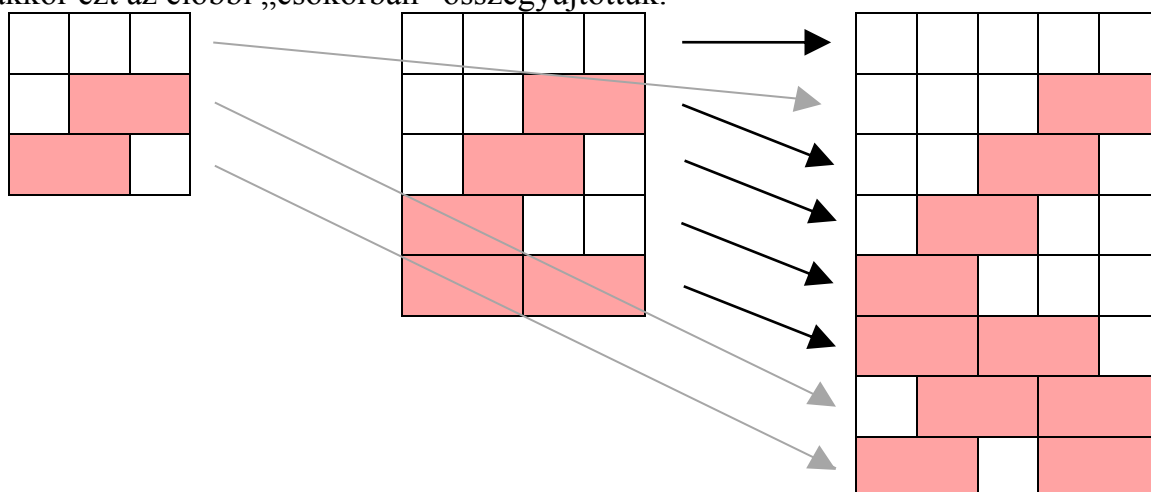
Gyűjtsük össze a lehetőségeket a táblázatból kiolvasható rend szerint. Azokat a sor-számokat írjuk egymás mellé, ahányadik lépések egy kiolvasásnál a „le”-lépések. (Foglalja szavakba a követett rendet!)

123																				
124	134					234														
125	135	145				235	245				345									
126	136	146	156			236	246	256			346	356			456					
127	137	147	157	167		237	247	257	267		347	357	367		457	467		567		
128	138	148	158	168	178	238	248	258	268	278	348	358	368	378	458	468	478	568	578	678
6	5	4	3	2	1	5	4	3	2	1	4	3	2	1	3	2	1	2	1	1

A lehetőségek számát az első hat háromszögszám összege adja:
 $1+3+6+10+15+21=56$.

Melléktermékként az is kiderült, hogy ahányféleképpen kiválaszthattuk a 8 közül a 3-at (a lefelé lépések sorszámait), annyiféleképpen választhatjuk ki az 5-öt (a jobbra lépések sorszámait). Ugyanis a 3 sorszám egy-egy megválasztásával pontosan kijelölődik az az 5 is, amikor jobbra lépünk.

17. A fehér csak egyféleképpen, a rózsaszín kétféleképpen: ff, r; a világoskék háromféleképpen: fff, fr, rf, de a piros ötféleképpen rakható ki: ffff, ffr, frf, rff, rr. A citromsárga hosszúságot kétféle hosszúságból kapjuk egy rúd hozzátoldásával: vagy a 4 centis kirakásokat toldjuk meg egy fehérrel, vagy a 3 centiseket egy rózsaszínnel. (A 3 centis megtoldása 2 fehérrel nem hoz új megoldást, hiszen, ha előbb az egyik fehérrel toldjuk hozzá, akkor 4 centisnél tartunk, s ezt hosszabbítjuk még egy fehérrel – akkor ezt az előbbi „csokorban” összegyűjtöttük.



A fekete nyilakkal jelöltük azokat a kirakásokat, amelyek a 4 centis kirakásokból származtak, a szürke nyilakkal pedig azokat, amelyek a 3 centisekből.

A gondolatmenet megismétlésével találunk választ a következő rúd kirakási lehetőségeire: annyi-féleképpen rakható ki fehérekkel és rózsaszínekkel a 6 centis (lila) rúd, ahány-féleképpen az 5 centis és a 4 centis együtt: $5+8=13$ -féleképpen. Hasonlóan adódik, hogy mindegyik további rúd annyi-féleképpen rakható ki, ahány-féleképpen az 1 centivel rövidebb és a 2 centivel rövidebb együtt. Így a következő számsorozattal felelhetünk az eredeti kérdésre:

1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377 610 987 ... , és itt még a rúdkészlet „foghíjassága” sem gátolja az általánosítást, hiszen a használható rudak mindvégig a fehérek és a rózsaszínek; a 11 centis hosszúságot 144-féleképpen lehet előállítani, a 12 centiset 233-féleképpen stb.

18. Ismét hiányzik egy adat: az, hogy hány fokú lépcsősorról van szó. Éppen ez lehet az alapja, hogy sorra vizsgáljuk meg a megoldásokat a kisebb számok körében, fogalmazzunk meg sejtést, aztán próbáljunk általánosítani.

Keressen kapcsolatot az előző feladattal!

- 19.* Most azok a számok adódnak össze, amelyek a fehér, a rózsaszín és a piros rúddal rövidebb rudak kirakásaira vonatkoznak. (Fogalmazzon meg egy-egy esetre vonatkozó megfontolást!

(M.: 1, 2, 3, 6, 10, 18, 31, 55, 96, ...)

20. 10 ugrással csak úgy lehet a 6-osra érni, ha 8 jobbra és 2 balra ugrást végzünk. Csak azt kell megválasztani, hogy hanyadik két ugrás legyen a balra ugrás. Azaz azt kell vizsgálni, hogy a 10 közül hány-féleképpen lehet kiválasztani a kettőt.

Első megoldásként sorolja fel az összes választási lehetőséget! Tartson rendet a felsorolásban!

Második megoldásként gondolja végig a lehetőségek számát úgy is, hogy 10 jelet (j = jobbra lépés; b = balra lépés) kell a lehetséges összes módon sorba állítani. Közülük 2 jel egyező és 8 jel szintén egyező.

Harmadik megoldás:

Gondolkodjunk ismét úgy, hogy a 10 közül 2 sorszámot kell kiválasztani.

Az egyik sorszámot 10-féleképpen választhatjuk, a másik sorszám megválasztásához mindegyik esetben 9-féle lehetőségünk van. Ez azt jelentené, hogy $10 \cdot 9 = 90$ -féle módon juthatunk 10 ugrással a 6-ra. Észre kell azonban venni, hogy ilyen módon minden számpárt kétszer sorolunk fel. (Például amikor az „egyik” sorszámnak választottuk a 3-at, emellé felsoroltuk az 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 mindegyikét „másik” sorszámként. De amikor az „egyik” a 7-es volt, akkor is soroltuk – a többi között – a 3-at.) Azaz a különböző sorszám-párok száma éppen a 90-nek a fele: 45.

21. A feladat hasonlít az előbbihez, de lényeges eltérés is van köztük. Ebben a feladatban ugyanis nincs a 0-szint alatt lépcső (nincs pince), és nem lehet a 6. fok fölé menni: az a lépcsősor vége. Tehát nem lehet 1. a lefelé lépés és nem lehet a 2. és 3., és nem lehet utolsó (10.), sőt a 8. és 9. sem. Eszerint a fenti 45 lehetőségből kimarad az 1;2, 1;3, 1;4, 1;5, 1;6, 1;7, 1;8, 1;9, 1;10, a 2;3, a 2;10, 3;10, 4;10, 5;10, 6;10, 7;10, 8;10, 9;10 és a 8;9. Összesen 26-féle út lehetséges.

Helyes kipróbálni, leírni a lehetséges utakat!

flflflflflf, flfflflflff, flffflflflf, flffflflff, flffflflff,
 flffflflff,
 fflflflflff, fflflflflff, fflflflflff, fflflflflff, fflflflflff,
 fflflflflff,
 fffflflflff, fffflflflff, fffflflflff, fffflflflff, fffflflflff,
 fffflflflff, fffflflflff, fffflflflff, fffflflflff,
 fffflflflff, fffflflflff, fffflflflff,
 fffflflflff, fffflflflff,

22. Kombinatorikus szempontból persze csak az a kérdés, hogy a 10 ajándék közül hányféleképpen lehet kiválasztani 2-t (3-at, 4-et). Az egyes választásokhoz tartozik mindig egy-egy két- (három-, négy-) tagú összeg. (Ezeket most nem soroljuk; a gyerekeknek azonban feladatuk lehet „minél többféle” megoldást keresni!)

10 áru közül 2-t 45-féleképpen választhatunk (lásd 20. feladat).

10 közül 3 árut kell kiválasztani. Haladjunk sorban! Az elsőt 10-féleképpen választhatjuk ki. Bármelyik is az első, 9-féleképpen választhatjuk meg a másodikat; ez tehát $10 \cdot 9$ -féle lehetőség. Bármelyik volt is az első két áru, harmadiknak már csak 8-féle közül választhatunk, erre tehát mindig 8-féle lehetőségünk van. Ez $10 \cdot 9 \cdot 8$ féle választás.

Észre kell azonban vennünk, hogy ebben a gondolatmenetben megkülönböztettük azt a 6 esetet, amikor ugyanazt a 3 árut másféle sorrendben választottuk. Ez éppen az a 6 ($=3!$) eset, ahogyan 3 elem sorbarendeázhető. Pl. a könyv (k), edény (e) és blúz (b) ilyen sorszámot kaphatott a vásárlás rendjében:

keb kbe ekb ebk bke bek

A kérdés szempontjából azonban természetes, hogy ezt a hat esetet nem különböztetjük meg egymástól; és bármelyik másik három áru különféle sorrendezései is csak egy-egy lehetőséget jelentenek. Ezért a lehetőségek száma: $10 \cdot 9 \cdot 8 / 1 \cdot 2 \cdot 3 = 120$

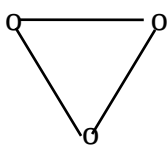
10 áru közül 4-et – a fenti gondolatmenetet követve – $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 / 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 210$ -féleképpen lehet megválasztani.

23. Ez azt jelenti, hogy minden gyerek „kihívja” mérkőzésre mind a 9 másikat. Ez tehát $10 \cdot 9$ mérkőzés. (Visszavágó nélkül nem különböztetnénk meg azt a két esetet, amelyben ugyanaz a két gyerek játszik, csak egyszer az egyik, egyszer a másik a kihívó.)

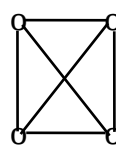
24. Attól függ, hányan találkoznak. Ha csak ketten, akkor ez egyetlen kézfogás. Ha hárman találkoznak, akkor már 3 kézfogás történik. Négy gyerek között 6 kézfogás történik... (Ábránkon o jelzi a gyerekeket, az összekötő vonal a kézfogást.)



1



3



6

Ha négyen már kezet fogtak egymással, és akkor jön az ötödik barát, akkor már csak azok a kézfogások vannak hátra, amelyeknek egyik résztvevője az új barát. Ő mind a 4 korábban érkezővel kezet fog: 4-gyel nő a kézfogások száma: $6+4=10$.

Ha öten már kezet fogtak, és akkor érkezik a hatodik barát, akkor csak az ő 5 kézfogása van hátra...

A legkisebb esetek is jól illeszkednek ebbe az épülésbe: 1, 1+2, 1+2+3 összegalakban adódnak ezek a számok, ahány gyerek találkozik, 1-től kezdve annyinál eggyel kevesebb természetes számot kell összeadni. (n gyerek esetén a kézfogások száma: $1+2+3+4+\dots+(n-1)$.)

Másik meggondolás:

Amikor 5 gyerek találkozik és mindenki mindenkivel kezet fog, bármelyiket megkérdezhetjük: mindenki azt fogja mondani, hogy ő 4-szer fogott kezet. Ez pedig $5 \cdot 4 = 20$ kézfogás. Csakhogy így megkülönböztettük azt a két kézfogást, amelyben ugyanaz a két gyerek vett részt, hiszen az egyik is számolta az ő összes kézfogását és a másik is. Minden kézfogást kétszer számoltunk, tehát a tényleges számuk $5 \cdot 4 / 2 = 10$.

Hasonlóan általában is igaz, hogy n gyerek mindegyike $n-1$ gyerekkel fogott kezet. Hogy azonban egy kézfogást se számoljunk kétszer az $n \cdot (n-1)$ felét kell venni; a kézfogások száma: $n \cdot (n-1) / 2$.

25. Ha a pontok gyerekeket jelölnek, a szakaszok megfelelnek a kézfogásoknak, megtaláljuk a választ az első kérdésre.

Nézzük a háromszögek számát!

Egy háromszög megalkotása azt jelenti, hogy kiválasztunk 3 pontot, s ezeket kötjük össze. Ha sorban haladunk, akkor n -féleképpen választható meg az első pont, hozzá $n-1$ -féleképpen a második, és ehhez a párhoz $n-2$ -féleképpen a harmadik. Minthogy azonban ugyanazt a háromszöget jelenti minden olyan választás, amelyben ugyanazok a pontok kerültek megválasztásra más-más sorrendben, hat-hat ($=3!$) esetet egy-egy választásnak kell tekintenünk.

A különböző háromszögek száma: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) / 1 \cdot 2 \cdot 3$.

Írja le a fenti gondolatmenetet a négyszögek, ötszögek esetére is!

Néhány egyszerű esetet táblázatba foglalhatunk a következőképpen. A besötétített mezőket egyedileg is át lehet(ett) gondolni. A továbbiakról pedig a következőképpen dönthetünk (elvileg mindig egyenként, de észrevehetjük az általánosítás lehetőségét is).

Pl. nézzük azt a kérdést, hogy ha 7 pont van, akkor hány négyszöget feszíthetünk ki rajtuk. (Ez a vastag vonallal körülvett mező kérdése.) Tegyük fel, hogy 6 pont esetére megalkottunk minden szakaszt, háromszöget, négyszöget, ötszöget és hatszöget. Amikor felvesszük a hetedik pontot is, akkor a négyszögek egyik része olyan lesz, amelynek nem csúcsa ez a hetedik, azaz a korábbi 6 pontra illeszkedik. Ebből 15 volt (a táblázat szerint). A négyszögek másik része olyan, amelynek egyik csúcsa

éppen ez az új, a hetedik. Ezeknek a négyszögeknek viszont a másik három csúcsa az előbbi 6 pont közül való, köztük határoz meg háromszöget. Ilyen négyszög tehát annyi lesz, ahány háromszög rajzolható a 6 pontra: 20. Így adódik a 7 pontra rajzolható négyszögek számára a $15+20=35$.

Ennyi pont	 szakaszhelyzet	 háromszöghelyzet	 négyszöghelyzet	 ötshöghelyzet	 hatszöghelyzet	 hétshöghelyzet	 nyolcszöghelyzet	 kilencszöghelyzet
2	1	0	0	0	0	0	0	0
3	3	1	0	0	0	0	0	0
4	6	4	1	0	0	0	0	0
5	10	10	5	1	0	0	0	0
6	15	20	15	6	1	0	0	0
7	21	35	35	21	7	1	0	0
8	28	56	70	56	28	8	1	0
9	36	84	126	126	84	36	9	1

Írja le a magyarázatát annak, hogy hogyan adódik az alsó sor 5. mezőjében a 84!

26. 5 közül hányféleképpen lehet kiválasztani 2-t? És 3-at?

Ha kiválasztottunk 2-t, ez a választás egy hármas csapatot is meghatároz: azok társasjátékozhatnak, akik éppen nem pingpongoznak. Tehát a lehetőségek száma megegyezik: $5 \cdot 4 / 1 \cdot 2 = 5 \cdot 4 \cdot 3 / 1 \cdot 2 \cdot 3$

27. $6 \cdot 5 / 1 \cdot 2 = 15$ a kiválasztható párok száma, $6 \cdot 5 \cdot 4 / 1 \cdot 2 \cdot 3 = 20$ a kiválasztható hármasoké. A négyes csapatok száma megegyezik a párok számával: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 / 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 6 \cdot 5 / 1 \cdot 2$.

Az ilyen kiválasztások számára adódó összefüggés formailag két szorzat hányadosa. Ha 6 elem közül kell választani pl. 4-et, akkor a számláló 4-tényezős szorzat: 6-tól kezdve lefelé az első négy természetes szám szorzata, a nevező pedig 4!. Ha a törtet bővítjük úgy, hogy a számlálóba 6! Kerüljön, akkor így alakul a hányados (a rövidítések miatt egyszerűbb lejegyzéssel, de a kiszámítás szempontjából az előbbi alak az egyszerűbb):

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6!}{4! \cdot 2!}$$

Ezt a hányadost szokás így jelölni: $\binom{6}{4}$ olv.: 6 alatt a 4.

28.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

A szelvényen 2 (3, 4, 5) számot kell megjelölni, ennyit húznak a sorsoláson.

a) A 9-es szelvényen $\binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36$ -féleképpen lehet 2 számot áthúzni. (Egy számot 9-féleképpen választhatunk meg, mellé a másikat 8-féleképpen. Így azonban minden számpárt kétszer számoltunk; pl. a 3-as mellé választottuk a 7-est és a 7 mellé a 3-ast is. Amikor áthúzzunk 2 számot, akkor két-két ilyen eset természetesen azonos, hiszen mindegy, melyiket jelöltük meg elsőnek, melyiket másodikként.) Érdekes lehet felsorolni az összes választási lehetőséget.

A harminchatféle kitöltésből természetesen csak 1 lehet „telitalálatos”.

Állapítsuk meg az 1 találatosok számát! Lehet, hogy a kisebbik kihúzott szám van megjelölve és a nagyobbik nem, hanem helyette a többi 7 szám valamelyike, lehet, hogy a nagyobbik szám van megjelölve, a kisebbike nem, hanem ehelyett a többi 7 közül egy. Ez tehát 2 szer 7-féle különböző kitöltés: 14 kitöltés.

A többi 21 szelvény 0 találatos. Ezek számát így is számolhatjuk. Ha egyik kihúzott szám sincs megjelölve egy szelvényen, akkor mindkét áthúzott szám a többi 7 közül való. 7 közül 2-t $\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21$ -féleképpen lehet kiválasztani.

Ha pl. 1 petákba kerül 1 szelvény, és a Szerencsejáték Rt csak a befolyt összeg harmadát teszi zsebre, akkor 36 szelvény után 24 peták osztható szét. Kapja meg az 1 találatos szelvény tulajdonosa az 1 peták nyereséget (ez 14 petákot jelenthet, ha mindenféle lehetőségből éppen egy kitöltés befut a 36 szelvény közül), a többi 10 peták pedig legyen a 2 találatos nyeresége. (Több megvásárolt szelvény esetén is lehet tartani ezeket az arányokat. Természetesen lehet más arányban is szétosztani a befolyt pénzt, pl. 1,5 petákot adni az 1 találatért, s akkor csak 3-at fizetni a 2 találatért – bár ez nem igazán vonzó a telitalálatos szelvényért, az 1 találatosok vonzóbbnak érzik a játékot stb.)

Hasonlóan gondolható ki más típusú szelvényeknél is, hogy miképpen fizessen a bank: kiszámítjuk, hányféle különböző szelvény tölthető ki, megállapítjuk hogy közük mennyi a 0, 1, 2, 3, ... találatosok száma, és aztán mérlegelünk: melyik mennyit fizessen, hogy a banknak megérje működtetni a játékot, a játékosokat pedig vonzza a nyerési esély.

A b – d esetek és a 6-os lottószelvény eseteit az Olvasó gondolja végig hasonlóan; itt csak a lehetőségek számait írjuk le.

9-es szelvényen 3 számot $\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$ -féleképpen lehet kiválasztani. 3-találatos szelvény csak 1 van a 84-féle kitöltés között. A 2 találatosok számát így számíthatjuk: a 3 kisorsolt szám közül 3-féleképpen jelölhettünk 2-t ($3 \cdot 2 / 1 \cdot 2$), mindegyik esetben a ki nem sorsolt 6 szám valamelyikét jelöltük hozzá harmadikként: tehát $3 \cdot 6 = 18$ különböző 2 találatos szelvény van a 84 között. Azokon a szelvényeken van 1 találat, amelyeken a 3 kisorsolt közül 1-et jelöltünk (erre 3-féle lehetőség van), és a 6 ki nem

sorsolt közül jelöltünk 2-t ($6 \cdot 5 / 1 \cdot 2 = 15$ -féle lehetőség); tehát $3 \cdot 15 = 45$ szelvényen van pontosan 1 találat a 84 különböző szelvény között. A maradék 20 szelvény 0 találatos. A 0 találatos szelvényen mind a 3 megjelölt szám a 6 ki nem sorsolt közül való: $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$. (Lehet, hogy a bank most akkor jár jól, ha fizet a 3 és 2 találatos szelvényekre, nem fizet az 1 találatosoknak, de „vigaszdíjat” ad a 0 találatos szelvényre.)

A 9-es szelvényen 4 számot $\binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126$ -féleképpen lehet kiválasztani. 4 találatos szelvény 1 van köztük, 3 találatos $4 \cdot 5 = 20$, 2 találatos $6 \cdot 10 = 60$, 1 találatos $4 \cdot 10 = 40$ és 0 találatos 5.

A 9-es szelvényen 5 számot $\binom{9}{5} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 126$ -féleképpen lehet kiválasztani. 5 találatos szelvény 1 van köztük, 4 találatos $5 \cdot 4 = 20$, 3 találatos $10 \cdot 6 = 60$, 2 találatos $10 \cdot 4 = 40$, 1 találatos $5 \cdot 1 = 5$, és 0 találatos nincs (hiszen ehhez a ki nem sorsolt 4 közül kellene 5-öt megjelölni!).

A 6-os szelvényen 2 számot $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$ -féleképpen lehet kiválasztani. 2 találatos szelvény 1 van köztük, az 1 találatosok száma $2 \cdot 4 = 8$, a többi 6 szelvény 0 találatos.

A 6-os szelvényen 3 számot $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$ -féleképpen lehet kiválasztani. 3 találatos szelvény 1 van köztük, 2 találatos $3 \cdot 3 = 9$, az 1 találatosok száma szintén $3 \cdot 3 = 9$ és 0 találatos 1.

A 6-os szelvényen 4 számot $\binom{6}{4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15$ -féleképpen lehet kiválasztani. 4 találatos szelvény 1 van köztük, 3 találatos $4 \cdot 2 = 8$, a 2 találatosok száma $6 \cdot 1 = 6$, de már 1 és 0 találatos nem lehet.

A 6-os szelvényen 5 számot 6-féleképpen lehet kiválasztani. 5 találatos szelvény 1 van köztük, a többi 5 szelvény 4 találatos.

29. Az ötös lottószelvényen 90 szám közül kell jelölni 5-öt. Ahhoz, hogy biztosan legyen telitalálatos szelvény, az összes lehetséges módon ki kellene tölteni egyet. Ez $\binom{90}{5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 43\,949\,268$ -féle kitöltést jelent, azaz csaknem 44 millió szelvényt kellene kitölteni.

30. Az autós kártyacsomagban $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ lap van. A negyede, azaz 6 lap piros, 6 sárga, 6 zöld és 6 kék; a harmadán, azaz 8 lapon személyautó látható, 8-on teherautó és 8-on versenyautó; az autók fele, 12 jobbra néző és 12 balra néző.

a) 24 lap közül 2-t (ha csak az fontos, hogy mi kerül a kezünkbe)

$$\binom{24}{2} = \frac{24 \cdot 23}{1 \cdot 2} = 276\text{-féleképpen lehet kivenni.}$$

$$3\text{-at } \binom{24}{3} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2024\text{-féleképpen,}$$

$$4\text{-et } \binom{24}{4} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 10\,626\text{-féleképpen,}$$

$$5\text{-öt } \binom{24}{5} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 42\,504\text{-féleképpen,}$$

$$6\text{-ot } \binom{24}{6} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 134\,596\text{-féleképpen}$$

$$7\text{-et } \binom{24}{7} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 346\,104\text{-féleképpen}$$

$$8\text{-at } \binom{24}{8} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 735\,471\text{-féleképpen.}$$

(Ha fontos lenne a sorrend is, akkor megkülönböztetünk minden párt (hármast, négyest...), amelyekben ugyanazokat a lapokat más sorrendben húztunk, ezért a lehetőségek számát nem kell elosztanunk a lapok összes sorrendezésének számával: mindegyik megoldásban elmarad a törtek nevezője.)

b) 4 lapot, hogy mindegyik lap piros legyen, úgy lehet venni, ha mind a négyet a 6 piros közül vesszük. Erre $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1} = 15$ -féle lehetőség van (ha nem fontos a húzás sorrendje). Ha a sorrend is fontos, akkor $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ -féle lehetőség van.

c) A 8 személyautó közül kell mind a 4-nek kikerülnie, ezt $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$ -féleképpen tehetjük meg. (1680-féle lehetőség lenne, ha érdekel az is, hogy milyen sorrendben kerültek a kezünkbe a lapok.)

d) $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495$ -féleképpen, (illetve 11 880-féleképpen).

e) Csak azzal az esettel foglalkozzunk, amikor nem érdekel bennünket a húzás sorrendje, csak az, hogy mely lapok vannak a kezünkben!

Az a feltétel, hogy „legyen a 4 kivett lap között sárga lap” azt jelenti, hogy legyen 1 sárga, vagy 2 sárga, vagy 3 sárga vagy mind a 4 sárga legyen.

Pontosan 1 sárga akkor kerül a kezünkbe, ha a 6 sárga közül húztunk 1-et (erre 6-féle lehetőségünk van), a többi 3 lapot a 18 nem-sárga közül vettük, erre pedig – mindegyik sárga lap mellé – $\frac{18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 816$ -féle lehetőségünk van. Pontosán 1 sárga $6 \cdot 816 = 4896$ -féleképpen kerülhet a kezünkbe.

Pontosan 2 sárga – ez azt jelenti, hogy 2 lap a 6 sárga közül való, 2 lap a 18 nem-sárga közül. A lehetőségek száma: $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{18 \cdot 17}{1 \cdot 2} = 15 \cdot 153 = 2295$.

Pontosan 3 sárga – azaz 3 a 6 sárga közül, 1 a 18 nem-sárga közül $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 18$ féleképpen, azaz 360-féleképpen lehet.

4 sárga (a b) feladat szerint) 15-féleképpen lehet.

Összesen tehát $4896 + 2295 + 360 + 15 = 7566$ -féleképpen lehetséges, hogy a 4 lap között lesz sárga.

Másik meggondolás:

Ezt a kérdést könnyebb úgy megválaszolni, ha már tudjuk, hogy egyáltalán 4 lapot 10 626-féleképpen vehetünk ki a 24 közül, és csak azt számítjuk, hányféleképpen húzhatunk úgy, hogy ne legyen sárga köztük. Tehát a 18 nem-sárga közül hányféleképpen vehetünk 4-et. Erre $\frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 3060$ lehetőség van.

A többi $10\,626 - 3060 = 7566$ esetben van sárga a 4 lap között.

31. A piros és a sárga szögletes lapok száma $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$, mert mind a 4 tulajdonságból 2-féle van a készletben.

a) Bármelyik lapot választjuk, tőle akkor tér el 1 tulajdonságban egy másik lap, ha a 4 tulajdonság közül éppen 1 különbözik a lap ilyen tulajdonságától, a többi 3 megegyezik. Különbözhet csak a színben, csak az alakban, csak a méretben vagy csak a lyukasságban. Ez 4 lap.

A 2 tulajdonságban eltérők száma annyi, ahányféleképpen a 4 tulajdonságból kiválasztható kettő: 6 ilyen lap van.

3 tulajdonságban eltérő annyi lesz, ahányféleképpen kiválasztható a 4 tulajdonságban az a 3, amiben különbözik, vagy az az 1, amiben megegyezik a kiválasztott laptól. Ezek száma ismét 4.

4 tulajdonságban csak 1 lap különbözik éppúgy, ahogy 0 tulajdonságban is. Válasszon ki egy lapot! Gyűjtse külön azokat, amelyek 1 tulajdonságban különböznek tőle, külön azokat, amelyek 2 tulajdonságban térnek el tőle, külön a 3 és külön a 4 tulajdonságban eltérőket!

- b) Ha egy új tulajdonság is megkülönböztethet két lapot egymástól, akkor a kiválasztott laptól 0, 1, 2, 3, 4, 5 tulajdonságban eltérők száma így fog alakulni:

Ennyi tulajdonságban eltérők	0	1	2	3	4	5
száma	1	5	10	10	5	1

- c) A nem lyukas lapokból fele annyi van, mint az a) készletben, és csak 3-féle tulajdonság különböztethet meg két lapot. Így a fenti táblázat eszerint alakul:

Ennyi tulajdonságban eltérők	0	1	2	3
száma	1	3	3	1

- d) Más irányú kiterjesztést jelentene pl. ha egy-egy tulajdonságnak nemcsak 2 értéke lenne, hanem 3 4 vagy még több. (Ilyenkor nem csak azt kell meggondolni, hogy hányféleképpen választhatjuk meg az eltérő tulajdonság-fajtát, hanem azt is, hogy pl. abban a tulajdonságban eltérő lapból van 2, 3 vagy még több is.

Pl. a gyerekek kezében levő logikai készlet 48 lapját 4-féle tulajdonság határozza meg, de 4 szín van és 3 forma. Egy kiválasztott laptól tehát lyukasságban illetve méretben eltérő lap itt is csak 1-1 van, de alakban különböző 2, színben eltérő pedig 3. 1 tulajdonságban 7 lap különbözik egy-egy laptól.

A 2 tulajdonságban eltérők számát így számolhatjuk: Ha az egyik tulajdonság a méret, akkor a másikat 1+2+3-féleképpen választhatjuk meg (a lyukasságot, a 2 formát vagy a 3 színt). Ha az egyik tulajdonság a lyukasság, akkor mellé kerülhet a forma és a szín (a mérettel már párosítottuk), ez még 2+3 lehetőség. Ha az egyik tulajdonság a szín, a másik a forma, ez 2·3 tulajdonság-párosítást jelent. Összesen tehát 17 lap van, amely 2 tulajdonságban tér el a kiválasztottól.

Ha 3 tulajdonságban tér el, ez a három lehet a méret, lyukasság és alak
a méret, lyukasság és szín
a méret, alak és szín
a lyukasság, alak és szín

A méretben, lyukasságban és alakban eltérők száma 2,

a méretben, lyukasságban és színben eltérők száma 3,

a méretben, alakban és színben eltérők száma $2 \cdot 3 = 6$

a lyukasságban, alakban és színben eltérők száma $2 \cdot 3 = 6$

Összesen 3 tulajdonságban 17 lap különbözik a választottól.

4 tulajdonságban különbözik a méretben és lyukasságban eltérő 2-féle alakú és 3-féle színű 6 lap.

32. a) Ha 3 kettes áll rendelkezésre az építéshez, akkor 4-féleképpen dönthetünk arról, hogy a felépítendő számba hány **2-es** tényező kerüljön: 0, 1, 2 vagy 3. Mindegyik esetben 0 vagy 1 **3-as** tényezőt tehetünk bele, minden ilyen esetben 0, 1 vagy 2 **5-ös** tényezőt tehetünk, és újabb döntésként bármelyik esetben 0 vagy 1 **11-es** tényezőt tehetünk az építendő számba. Így a lehetséges „építmények” száma: $4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 48$. (Köztük van az a szám is, amelyben 0 **2-es**, 0 **3-as**, 0 **5-ös** és 0 **11-es** van, ezt tekintsük az 1-nek.)

(Lásd a következő oldal táblázatát!)

2-esek száma	3-asok száma	5-ösök száma	11-esek száma	A SZÁM
0 db 2-es	0 db 3-as	0 db 5-ös	0	1
			1	11
		1 db 5-ös	0	5
	1 db 3-as		1	55
		2 db 5-ös	0	25
			1	275
		0 db 5-ös	0	3
			1	33
1 db 2-es	0 db 3-as	1 db 5-ös	0	15
			1	165
		2 db 5-ös	0	75
	1 db 3-as		1	825
		0 db 5-ös	0	2
			1	22
		1 db 5-ös	0	10
			1	110
2 db 2-es	0 db 3-as	2 db 5-ös	0	50
			1	550
		0 db 5-ös	0	6
	1 db 3-as		1	66
		1 db 5-ös	0	30
			1	330
		2 db 5-ös	0	150
			1	1650
3 db 2-es	0 db 3-as	0 db 5-ös	0	4
			1	44
		1 db 5-ös	0	20
	1 db 3-as		1	220
		2 db 5-ös	0	100
			1	1100
		0 db 5-ös	0	12
			1	132
		1 db 5-ös	0	60
4 db 2-es	0 db 3-as		1	660
		2 db 5-ös	0	300
			1	3300
	1 db 3-as	0 db 5-ös	0	8
			1	88
		1 db 5-ös	0	40
			1	440
		2 db 5-ös	0	200
5 db 2-es	0 db 3-as		1	2200
		0 db 5-ös	0	24
			1	264
	1 db 3-as	1 db 5-ös	0	120
			1	1320
		2 db 5-ös	0	600
			1	6600

Érdemes a táblázatot úgy is elkészíteni, hogy a felhasználható prímtényezőket csökkenő sorrendbe állítjuk, mert így könnyebben figyelhetjük meg az elkészített számok kapcsolatait. (Lásd a következő oldalt!)

11-esek száma	5-ösök száma	3-asok száma	2-esek száma	A SZÁM
0 db	0	0	0	1
			1	2
			2	4
			3	8
	1	1	0	3
			1	6
			2	12
			3	24
	2	0	0	5
			1	10
			2	20
			3	40
	3	1	0	15
			1	30
			2	60
			3	120
1 db	0	0	0	25
			1	50
			2	100
			3	200
	1	1	0	75
			1	150
			2	300
			3	600
	2	0	0	11
			1	22
			2	44
			3	88
	3	1	0	33
			1	66
			2	132
			3	264
2 db	0	0	0	55
			1	110
			2	220
			3	440
	1	1	0	165
			1	330
			2	660
			3	1320
	2	0	0	275
			1	550
			2	1100
			3	2200
	3	1	0	825
			1	1650
			2	3300
			3	6600

b) A lehetőségek számán nem változtat, ha másik prímtényezőből van ugyanannyi, mint az előbbi készletben. Készítse el az Olvasó az új táblázatot két 2-es, három 3-as, egy 7-es és egy 17-es felhasználásával!

33. 100-as létszámú évfolyamból az első 20-as csoportot $\binom{100}{20}$ féleképpen választhatjuk ki. A maradék 80 közül a következő 20-fős csoportot $\binom{80}{20}$ féleképpen, a következő csoportot $\binom{60}{20}$ féleképpen, a következőt $\binom{40}{20}$ féleképpen, és az utolsó választásra $\binom{20}{20}=1$ -féle lehetőség marad. Ezek szorzata adja az összes lehetőséget akkor, ha az is fontos, hogy melyik csoportot fogjuk 1.-nek, 2.-nak, 3.-nak, 4.-nek és 5.-nek nevezni. Ha ez nem fontos, akkor az 5 csoport sorrendezéseinek számával (5!-sal) kell a szorzatot elosztani.

34. Vegyük sorra a rudakat!

A fehérét 1-féleképpen lehet kirakni: f

A rózsaszínt 2-féleképpen: ff, r

A világoskékét 4-féleképpen: fff, fr, rf, v

A pirosat 7-féleképpen: ffr, frf, rff, fv, vf, rr, p

A citromsárgát 11-féleképpen: ffv, fvf, vff, frr, rfr, rrf, fp, pf, rv, vr, c

A lilát 16-féleképpen: ffp, fpf, pff, frv, fvr, rfv, rvf, vfr, vrf, rrr, fc, cf, rp, pr, vv, l

A feketét 22-féleképpen: ffc, fcf, cff, frp, fpr, rfp, rpf, pfr, prf, fvv, vfv, vvf, rrv, rvr, vrr, fl, lf, rc, cr, vp, pv, fek.

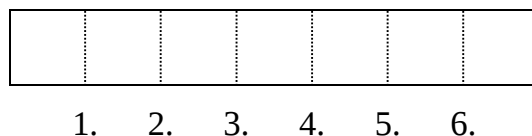
...

Eddig azt lehet megfigyelni a kapott számsorozatban: 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, ..., hogy a különbségsorozat 1-től kezdődően egyesével növekszik. (Mindig 1-gyel több a különbség.) Vajon lehet, hogy tovább is ilyen szabályszerűséget fog mutatni a lehetőségek száma? Van-e valamilyen megmagyarázható oka az ilyen növekedésnek? Picit még pontosabban megfogalmazva: annyival növekszik a lehetőségek száma, ahány egységnyi az előző rúd hossza. (Pl. a 7 cm-es rúd kirakásainak száma annyi, mint a 6 cm-es rúd kirakásainak száma + 6.)

1 darabból bármelyik rudat 1-féleképpen lehet kirakni: önmagával.

2 darabból 1-gyel kevesebb féleképpen, mint ahány egységnyi a rúd, hiszen elsőnek bármelyik nála kisebb rúd szerepelhet – amit kiegészítünk egy másikkal. Mindegyik rúdra igaz, hogy 1-gyel kevesebb nála kisebb rúd van, mint ahány egyiséget ő képvisel.

3 darabból annyiféle kirakás készíthető, ahányféleképpen 2 helyet kijelölhetünk a rúd egységnyi osztáspontjai közül. Például a 7 cm-es rúd esetén 6 egységnyi osztáspont van; 6 közül 2 helyet $\binom{6}{2} = 15$ -féleképpen lehet kiválasztani



Ha most ezt az utóbbi észrevételt kiterjesztjük a 2-darabos kirakásokra és az 1-darabosra is, akkor azt is megfogalmazhatjuk, hogy mindegyik n hosszúságú rúd ilyen kirakásainak száma

$$\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}$$

Nézzük most ezeket az értékeket azokra a konkrét számokra, amiket centiméterekben kifejezve a rudak képviselnek!

$$f: 1+0+0$$

$$r: 1+1+0$$

$$v: 1+2+1$$

$$p: 1+3+3$$

$$c: 1+4+6$$

$$l: 1+5+10$$

$$fek.: 1+6+15$$

A 25. feladat megoldása során készítettünk táblázatot – az ún. Pascal-háromszöget –, amelyben az ilyen kiválasztások számát gyűjtöttük. Ott megfigyelhettük, hogy a táblázat első oszlopában mindig 1 áll, a többi számot pedig a felette álló szám és az ettől balra álló szám összegeként kapjuk. Tehát pl. két sor első három száma így keletkezik a megelőző sor számaiból:

1	5	10
↓	↘	↓
1	6	15

1, 1+5, 5+10

azaz éppen az 1+5 szerepel kétszer a három szám összegében, ami az 1 egységgel rövidebb rúd hossza.

35. *Ahány osztópárja van. Az osztók a prímtényezők segítségével építhetők fel. (1·96, 2·48, 3·32, 4·24, 6·16, 8·12; azaz 6 különböző téglalap van. A 96 prim-hatványtényezős szorzatalakja: $2^5 \cdot 3$; a 32. feladat szerint 6·2 az osztók száma, ez 6 párba rendezhető)*

A 2160 prim-hatványtényezős szorzatalakja: $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$; a kitevőknél mindig 1-gyel nagyobb a választási lehetőségek száma arra, hogy arról a tényezőről hogyan dönthetünk. A kitevőknél 1-gyel nagyobb számokat összeszorozva kapjuk a összes osztóinak a számát: $5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$. Ebből pedig 20 pár alkotható. Ennyi lesz a különböző téglalapok száma.

36. *Ahány olyan számhármast össze lehet állítani a szám osztóiból, amelyek szorzata kiadja a számot. $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$; a prímtényezőkből alkotható osztók száma $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Ezek: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360. Ha most lekötjük az egyik tényezőt, akkor a 360-at ezzel elosztva, a hányadost már csak 2 tényezős szorzatra kell bontani.*

Legyen az egy tényező az 1, akkor a másik kettőt a $360/1 = 360$ osztópárjai képezik: ez 12 lehetőség. Ha az elsőnek megválasztott tényező a 2, akkor a 180 osztópárjainak száma adja meg a következő lehetőségek számát. A 180-nak 18 osztója van, tehát olyan 3-tényezős szorzat, amelyben egy tényező a 2-es, 9 db van; közülük azonban már számba vettük azt az egyet, amelyben szerepelt az 1-es tényezőként, tehát 8-at kell csak számolnunk. Ha az elsőnek választott tényező a 3, akkor a 120 összes osztóit keresve azokat a párokat kell számolnunk, amelyekben nem tényező sem az 1, sem a 2. (16 osztóból 8 párt képezhetünk, közülük 2 olyan van, amit már számoltunk) ... A gondolatmenetet folytatva eljutunk a megoldáshoz: 32 ilyen téglalatest építhető.

37. *Az a) és b) feladatot csak az különbözteti meg egymástól, hogy a b)-ben szerepel a 0 is. Ez a tény azt jelenti, hogy ez utóbbi feladatban a szám első jegyeként eggyel kevesebb számjegy jöhet szóba. A c) feladatban az egyező számok módosítanak a lehetőségek számán.*

*Az első háromjegyű szám megalkotásához 7 szám közül kell **sorban** megválasztani 3-at, a második háromjegyűhöz a megmaradt 4 közül kell választani 3-at. Azok az*

esetek lesznek itt azonosak, amikor ugyanazt a két háromjegyűt képezzük, csak egyszer az egyik háromjegyűt előbb, aztán a másikat. Ezért az előbb kapott lehetőség-számot meg kell felezni.

Az a)-ban 2520, a b)-ben 1800 a lehetőségek száma, a c)-ben 372.

38. 4 piros, 2 sárga és 1 zöld golyó közül húzunk ki hármat.

a) Jelöljük a színeket a kezdőbetűjükkel! A lehetőségek a következők:

ppp, pps, ppz, pss, psz, ssz.

b) Ahol a három golyó azonos színű, ott a sorrendeket nem lehet megkülönböztetni. Ahol 2 egyforma és 1 más, ott háromféle sorrend van (hiszen az 1 különböző három sorszámot kaphat), ahol pedig mind különböző, ott 6 különféle sorrendet különböztethetünk meg. Így a lehetőségek száma: $1+3+3+3+6+3=19$.

c) Így minden húzásra háromféle lehetőségünk lesz: *p*, *s* vagy *z* akad a kezünkbe. A lehetőségek száma $27 (=3 \cdot 3 \cdot 3)$.

39. 9

40. 27

41. 8

42. A 27 háromjegyű számot legszebben térben, egy $3 \times 3 \times 3$ -as kocka egységkockáiban lehetne elhelyezni. Pl. egy-egy rétegbe azok a számok kerülnének, amelyekben ugyanannyi a százaskok száma, s az egymás alá kerülő három szám csak a százaskok számában térne el egymástól.

222	223	225
232	233	235
252	253	255

alsó réteg

322	323	325
332	333	335
352	353	355

középső réteg

522	523	525
532	533	535
552	553	555

felső réteg

Más elrendezést hoz létre egy $3 \times 3 \times 3$ -as fa; ha nagyság szerint növekvő rendet akarunk létrehozni, akkor az alsó ágak a százaskok, a középső ágaz a tízesek, a felső számok az egyesek szerint rendeznek (a számjegyeket is nagyság szerinti rendben).

43. A 3 csík azt is jelenti, hogy szomszédos csíknak nem választhatjuk ugyanazt a színt. Tehát az alsó csík megfestéséhez háromféle választásunk van, bármelyik esetben 2-féle színűre festhetjük a második csíkot, s bármilyen a középső csík színe, a másik két szín szerepelhet a felső csík színeként. Ez $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ lehetőség.

44. A harmadik csík színét már nem választhatjuk meg: olyannak kell lennie, amilyen szín nem szerepelt az alsó és középső csíkon. $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ -féle lehetőség.

45. Ha fontos az is, hogy milyen sorrendben kerülnek egymásra a gombócok, akkor mind a három gombóc kiválasztására – a másik kettőtől függetlenül – 3 lehetőség van; az összes lehetőség száma: $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

Ha pl. tábla mérjük ki a gombócokat (nem tölcserbe) –, s ezért mindegy, milyen sorrendben adagolták –, akkor lehet mindhárom gombóc azonos fajta: ez három lehetőség (ccc, mmm, cscscs). Lehet 2+1-es – ez 6-féle lehetőség, hiszen háromféleképpen választható meg az, hogy miből legyen 2 gombóc, mindegyik esetben kétféleképpen választhatjuk meg a tőlük különböző gombócot. Végül lehet mind a három különböző – ez pedig egyetlen lehetőség. Összesen 10-féle választásunk van.

46. A felhasználható színek száma

	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
A torony 2	1	4	9	16	25
szintjei- 3	1	8	27	64	125
nek száma 4	1	16	81	256	625
5	1	32	243	1024	3125

47. A felhasználható színek száma

	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
A torony 2	1	2	6	12	20
szintjei- 3	1	2	12	36	80
nek száma 4	1	2	24	108	320
5	1	2	48	324	1280

(A másodiktól kezdődően mindegyik szinten 1 színt nem használhatunk az adottak közül: azt, amelyik az előző szint színe.)

48. „Szónak” most mindenféle betűcsoportot elfogadunk akkor is, ha a magyar nyelvben ennek nincs jelentése. (Kisiskolás korban szólhat a feladat egy mesterségesen megalkotásra váró nyelv lehetséges szavairól.)

Az első betű megválasztására 24 lehetőségünk van, a másodikra 14 (függetlenül az első betűtől), a harmadikra 24, a negyedikre 14 és az ötödikre 24. A lehetőségek száma tehát: $24^3 \cdot 14^2 = 2\,709\,504$

49. Az „azonos szerkezet” megnyilvánulhatott a megoldások hasonló gondolatmenetében. Sokszor segíthet a táblázat vagy fadiagram a szerkezet megértésében. A megoldott feladatok újragondolása szerkezetük szerint segítheti a legfőbb kategóriák kialakulását.
- Pl. azt, hogy a különböző elemek sorrendezéseinek (permutációinak) számát hogyan számíthatjuk,
 - hogyan vehetjük figyelembe, ha több megkülönböztethetetlen van az elemek között (ismétléses permutációk száma);
 - hányféleképpen lehet 2, 3, 4... elemű sorozatot képezni, ha 1, 2, 3, 4... különböző elemből választhatunk minden alkalommal (ismétléses variációk száma),
 - és hogyan alakul a sorozatok száma, ha a korábban használt elem nem választható újra az adott sorozatban (ismétlés nélküli variációk száma);
 - hogyan vehetjük figyelembe, ha csak a sorozatba kerülő elemek fontosak, és a sorrendjük nem érdekes, azaz hányféleképpen választhatunk adott elemszámú részhalmazt adott halmazból (ismétlés nélküli kombinációk száma).
50. Például gyűjtse össze az alsó tagozatos tankönyvcsaládokból azokat a feladatokat, amelyekben 3 különböző elem sorrendezéseinek számát állapítják meg a gyerekek, illetve ezeket a sorozatokat állítják elő!