

MATEMATIKAI LOGIKA

MATEMATIKA SEGÉDANYAG A TANÍTÓKÉPZÉSHEZ

C. Neményi Eszter ©

2015.

ELTE TANÍTÓ- ÉS ÓVÓKÉPZŐ KAR

SZERKESZTŐ:

Radnai Gyuláné Dr. Szendrei Julianna ©

LEKTOROK:

Wéber Anikó vezető tanító és a
Matematika Tanszék munkatársai

KIADJA:

ELTE TANÍTÓ- ÉS ÓVÓKÉPZŐ KAR

A segédanyag a 2003-ban megjelent kiadvány egy részletét tartalmazza.
Készült: az ELTE Tanító-és Óvóképző Kar Tanító szakos hallgatói számára.

Budapest, 2015.

Matematikai logika

Amint a halmazok téma feldolgozásánál tettük, úgy most is példákból indulunk ki, hogy arra építhessünk egy sor részletet.

R. Smullyan két érdekes feladata a következő: (*R. Smullyan: „Mi a címe ennek a könyvnek?” 26. feladványa; 30. old.*)

„Rejtvények hosszú sora szól egy szigetről, amelynek bizonyos lakói, a „lovagok”, mindig igazat mondanak, míg a többiek, a „lókötők” mindig hazudnak. ...

Három lakos – A, B és C – együtt álldogál egy kertben. Egy arra járó megkérdezi A-t: „Ön lovag, vagy lókötő?” A válaszol, de olyan érthetetlenül, hogy az idegen nem tudja kivenni, mit is mondott. Megkérdezi B-t: „Mit mondott A?” B válasza: „Azt mondta, hogy ő lókötő”. Ekkor közbeszól C, a harmadik ember: „Ne higgyen B-nek, hazudik.!” A kérdés az, hogy mit tudhatott meg az idegen hármójukról.”

Megoldás: Mivel senki nem mondja magát lókötőnek (sem a lovag, mert ő igazat mond, sem a lókötő, mert ő meg nem mondhatja meg az igazat magáról), ezért A biztosan loagnak vallotta magát. B azt állította, hogy A lókötőnek mondta magát, tehát B lókötő. C kijelentése igaz B-ről, ő lovag. A-ról viszont nem derül ki, hogy kikhez sorolható.

A másik példa: (*Smullyan: Lovagok és lókötők szigete: 28. feladvány*):

Két szereplő: A és B, mindkettőjük lovag vagy lókötő egymástól függetlenül. A a következőt állítja: „Legalább egyikünk lókötő.” Miféle A és miféle B?

Megoldás: Gondoljuk ki, mi következik abból, ha A állítása hamis! Ha A állítása hamis, akkor A természetesen lókötő, hiszen csak a lókötők tudnak hamis állítást mondani. Ugyanakkor, **ha ez a mondat nem igaz, akkor a tagadása igaz**, az ugyanis, hogy „Egyikünk sem lókötő.” Ellentmondásra jutottunk: **Nem lehet egyszerre igaz egy állítás is és a tagadása is**, azaz nem lehet egyszerre igaz két emberre az, hogy az egyik (A) lókötő, meg az is, hogy egyikük sem lókötő.

Ha az eredeti feltevésünk ellentmondásra vezetett, akkor az hibás, téves feltevés volt. Ezért most gondoljuk végig, hogy mire jutunk, ha az A mondata igaz állítás. Természetesen A lovag, hiszen mostani feltevésünk szerint igaz állítást mondott. Amennyiben pedig igaz, hogy egyikük lókötő, akkor B az.

Példáinkban több helyen fordult elő, hogy valamely állítás tartalmáról egy pillanatra el is felejtkezhettünk akár, és csak arra hivatkoztunk, hogy ha **ez a mondat nem igaz, akkor a tagadása igaz**. Vagy hogy **nem lehet egy mondat és a tagadása egyszerre igaz**.

Az, hogy az állítások konkrét tartalmától függetlenül tudunk igaz vagy téves állításokból újabb igaz vagy nem igaz állításokat létrehozni, azaz lehetőségünk van **általában gondolkodni állítások igazságáról**, ez teszi lehetővé, hogy belepillantsunk gondolkodásunk szerkezetébe, és megismerkedjünk olyan gondolati tevékenységekkel, mint „műveletek az állítások körében”, „következtetés”, „bizonyítás”, „cáfolás” stb.

1. Alapvető ismeretek

Az ítélet alapfogalom – s ezért nem definiáljuk, hanem „körülírjuk”. **Ítéletnek nevezzük azokat a kijelentéseket, állításokat, mondatokat, amelyek vagy igazak, vagy hamisak, (tévesek, nem igazak).** Az „igaz”, „téves” tulajdonságokat logikai értékeknek mondjuk.

Nem lehet ítélet egy kérdő mondat, egy felkiáltó felszólító vagy óhajtó mondat, és nem ítélet az a hiányos mondat sem, amelyben alany vagy állítmány hiányzik.

Pl. ítélet az, hogy $2 \times 2 = 4$, meg az is, hogy $3 \times 4 < 4 \times 3$ – az első ugyanis igaz, a második nem. Nem ítélet a $2 + \square = 6$, hiszen nincs igazságértéke. Igazzá vagy tévessé azáltal válik, ha pl. az $\square$ helyébe 4-et, 5-öt, 1-et ... írunk, vagy másképpen tesszük „zárttá”: „Minden $\square$ számra igaz, hogy $2 + \square = 6$ ”, vagy „Van olyan $\square$ szám, ami igazzá teszi, hogy $2 + \square = 6$.”

A logika két alapvető törvénye

- **Egy állítás nem lehet egyszerre igaz is és hamis is. (Ellentmondás-mentesség elve)**
- **Egy állításnak igaznak vagy hamisnak kell lennie, nincs harmadik eset. (A harmadik kizárásának elve)**

(Ezek az alapvető törvények szoros kapcsolatban vannak az elemek egyértelmű halmazokba sorolásával, a halmazok megadásának egyértelműségével. Ott is szükségszerűen egyetlen helye van minden elemnek: vagy beletartozik egy halmazba, vagy nem. Egyszerre nem következhet be mindkettő. Másrészt a kettő közül az egyik biztosan bekövetkezik: bármely elem beletartozik egy részhalmazba vagy a komplementumába – nincs harmadik eset.)

Az ítéletek szerkezete

Az ítéletet általában **nagybetűkkel** jelöljük mindaddig, amíg adott, konkrét állításról van szó. Ha általánosítani akarunk, azaz az összes lehetséges állítást akarjuk összefogni azzal a céllal, hogy már csak az igazságértékére gondoljunk, akkor kisbetűket használunk.

Egy ítélet egyszerű, ha nem bontható fel további ítéletekre. Az összetett ítéletek egyszerű ítéletekből épülnek, ilyenekre bonthatók. Gondolkodásunk elemzése, megértése érdekében elemi ítéletekből fogunk építkezni. Ezeket az elemi ítéleteket az összetett ítélet **komponenseinek** mondjuk.

Például egyszerű ítéletek:

Süt a nap. Ma kedd van. Minden hétszirmú piros virágnak jó illata van. Csak azok a hallgatók nyerhetik el a tandíjmentességet, akik jó tanulmányi eredményt érnek el. „A lélek akkor öregszik, ha már csak földön járnak a vágyai, szárnyaltalanul.” (*Ancsel Éva: Száznolcvankét új bekezdés az emberről*)

Ezek az ítéletek köznyelvi értelemben lehetnek nagyon bonyolultak, sokszorosán bővítettek, sőt alárendelten összetettek is. Úgy gondolhatjuk, hogy a mondataink fő struktúrájuk szerint egy alanyból és egy állítmányból állnak – az állítmányhoz hozzátartozva az állítmány bővítményeit, az alanyhoz pedig az alany bővítményeit.

Összetett ítéletek pl.:

„Vagy bolondok vagyunk, s elveszünk egy szálig, vagy ez a mi hitünk valósággá válik.” (*Ady: Fölszállott a páva*); „Tán csodállak, ámde nem szeretlek” (*Petőfi: Az Alföld*); „Legalább egyikünk lóköető.” (*Smullyan*); (Ez ugyanis arra a két részállításra bontható, hogy B lóköető, vagy A lóköető.)

Az összetett ítéletek úgynevezett **logikai műveletekkel** képezhetők más ítéletekből. Azt is mondhatjuk, hogy egy vagy több ítélethez valamilyen módon – többnyire nyelvtani formulák segítségével – ítéletet rendelünk, ezáltal végzünk logikai műveletet.

Amikor a mondatok szerkezetét vizsgáljuk, állításokból, ítéletekből új ítéleteket hozunk létre, akkor az ítéleteket képviselő betűjelekből és „műveleti jelekből” álló kifejezésekkel dolgozunk. Ezeket a kifejezéseket **formuláknak** nevezzük. (Néha ez egyetlen betűjelre is redukálódhat.) **Formulának** nevezzük az állítások logikai értékének jelölésére használt kis betűkből és műveleti jelekből álló kifejezéseket is.

2. Logikai műveletek ítéletekkel

2.1 Konjunkció

1. A 72 osztható 2-vel és (osztható) 3-mal.
2. A 72 osztható 2-vel és (osztható) 5-tel.
3. A 72 osztható 7-tel és (osztható) 13-mal.

Az 1. összetett ítéletet mindenki igaznak tartja, a 2.-at és 3.-at nem.

Vizsgáljuk meg ezeknek a mondatoknak a szerkezetét! Ehhez formalizáljuk őket!

A három mondat elemi ítéletei: K: A 72 osztható 2-vel,
H: A 72 osztható 3-mal.
O: A 72 osztható 5-tel,
P: A 72 osztható 7-tel
T: A 72 osztható 13-mal.

Mindhárom mondatban a két-két elemi ítéletet az **és** kötőszó kapcsolja össze, szerkezetük, formulájuk: „**K és H**”, „**K és O**”, „**P és T**”. Az ily módon „és”-sel összekapcsolt ítéletet **csak akkor tekintjük igaznak, ha mindkét komponense** (a benne szereplő mindkét egyszerűbb ítélet) **igaz**. A „**K és H**” formulával megadható műveletet és a létrejövő összetett ítéletet egyaránt **konjunkciónak** nevezzük. A konjunkció pontos definícióját azonban nem ezek a szavak adják meg, hanem – mint alább leírjuk – az, hogy minden lehetséges esetre megmondjuk, hogy igaz-e ez az összetett ítélet vagy téves.

A színes, élő nyelv ugyanis igen sokféleképpen fejezi ki ezt a kapcsolatot: „de”, „ámde”, „bár ... mégis”, „sőt”, „mindkettő”, ..., tehát nem maga az „és” szó a döntő, hanem a kapcsolat szorossága: az az értelme ugyanis, hogy csak a teljes igazság igazság. Ezt annál is fontosabb tudni, mert az „és” kötőszót is használjuk más értelemben, nemcsak a konjunkció kifejezésére. Például amikor azt állítjuk, hogy az osztályba járnak szőke és kék szemű lányok, ezt úgy értjük, hogy olyanok, akik egyszerre szőke hajúak és kék szeműek is. Ha viszont azt mondjuk, hogy az osztályba járnak szőkék és kék szeműek is, akkor lehet, hogy egyik szőke lánynak sem kék a szeme.

A logikai műveleteket az **értéktáblázatukkal definiáljuk**. Az értéktáblázat számba veszi a komponensek összes lehetséges logikai értékét, s minden esetre megmondja, hogy ez esetben a művelettel képzett összetett ítélet igaz-e vagy téves.

Egyetlen ítélethez kétsoros táblázat tartozik: az ítélet igaz vagy nem.

Két ítélet esetén már négyféle lehetőséget kell vizsgálnunk: lehet mindkét komponens igaz, lehet az első igaz, második nem, vagy fordítva, és lehet mindegyik hamis.

Három ítélet esetén nyolc esetet kell megkülönböztetni.

p	
i	
h	

p	q	
i	i	
i	h	
h	i	
h	h	

p	q	r	
i	i	i	
i	i	h	
i	h	i	
i	h	h	
h	i	i	
h	i	h	
h	h	i	
h	h	h	

(Érdemes megőrizni a táblázatnak egyféle rendjét, mert így könnyebben összehasonlíthatóvá válnak a különféle kifejezések.)

A konjunkciót tehát értéktáblázatával így definiáljuk:

p	q	$p \wedge q$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

A táblázatból közvetlenül leolvasható a művelet kommutativitása: a p és q minden igazságértéke esetén $p \wedge q = q \wedge p$

Vizsgáljuk meg, hogy vajon **asszociatív-e** a konjunkció művelete! Ehhez azt kell vizsgálni, hogy azonos-e a következő két kifejezés:

$$(p \wedge q) \wedge r \text{ és } p \wedge (q \wedge r).$$

Figyeljünk az igazolás módjára! A p, q, r minden lehetséges igazságértéke esetén megvizsgáljuk, hogy azonos-e a két összetett ítélet logikai értéke, és csak akkor mondjuk, ki, hogy fennáll az azonosság, ha sorról-sorra minden esetben egyezik a két táblázat. (Azért lehetséges ezáltal az összes lehetséges három ítéletből létrehozott ilyen összetett ítéletre kimondani az azonosság fennállását, mert az állítások helyett igazságértékeket vizsgáljuk.)

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$
i	i	i	i	i
i	i	h	i	h
i	h	i	h	h
i	h	h	h	h
h	i	i	h	h
h	i	h	h	h
h	h	i	h	h
h	h	h	h	h

p	q	r	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
i	i	i	i	i
i	i	h	h	h
i	h	i	h	h
i	h	h	h	h
h	i	i	i	h
h	i	h	h	h
h	h	i	h	h
h	h	h	h	h

Leolvasható, hogy ha egy ítéletet önmagával kapcsolunk össze a konjunkció műveletével, akkor természetesen önmagát, az eredeti ítéletet kapjuk: Ady sorában a „Szeretlek és szeretlek és szeretlek” hangulatilag többet mondott, mintha csak azt állította volna, hogy szeretlek, de matematikai értelemben mégiscsak ezt fejezte ki.

$$s \wedge s = s, \text{ sőt } s \wedge s \wedge s = s$$

hiszen

s	$s \wedge s$
i	i
h	h

azaz $s \wedge s$ éppen akkor igaz, amikor s igaz, éppen akkor hamis, amikor s hamis.

2.2 Diszjunkció

A megengedő diszjunkció

„Az áldozat otthon volt az este, vagy szólt a rádiója.” – hangzik el egy tanú vallomása.

A két elemi ítélet, amiből a kijelentés készült:

1. Az áldozat otthon volt az este.
2. Szólt a rádiója.

A kettőt a **vagy** szó kapcsolja össze. Mondatunk értelme szerint akkor fogadjuk el igaznak ezt a „vagy”-gyal összetett állítás-formát, ha valamelyik komponense igaz: az első, a második vagy esetleg mindkettő. Tehát csak egy esetben hamis: amikor mindkét részítélet hamis.

Táblázattal így definiáljuk a diszjunkció műveletét és a diszjunkcióval képzett összetett ítéletet:

p	q	$p \vee q$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

A táblázatból közvetlenül leolvasható a művelet kommutativitása: $p \vee q = q \vee p$. (Pontos megfogalmazását az olvasóra bízunk!)

Önálló feladat: az asszociativitást és az ítélet önmagával vett diszjunkcióját értelmezni, táblázattal megmutatni.

A diszjunkció és konjunkció együttesére vonatkozó műveleti tulajdonság a **disztributivitás**. Ennek a tulajdonságnak a matematikai logikán belül éppúgy két változata igaz, mint a halmazműveletekkel kapcsolatban:

$$(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \quad (p \wedge q) \vee r = (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

A kizáró diszjunkció

„Vagy moziba megyünk, vagy színházba.” Mit jelent ez a nyomatékos kettős vagy-gyal megfogalmazott mondat?

Elsőre megállapíthatjuk, hogy nem igaz a kijelentés, ha egyik ígéretet, elhatározást sem váltják be. Szintén könnyű egyetérteni azzal, hogy igaz az összetett mondat akkor ha csak moziba mennek vagy csak színházba. Most azonban nem tekintjük igaznak a mondatot, ha végül a mozi után elmennek a színházba is. Éppen ezt az esetet zárja ki a kettős vagy.

Táblázattal így adjuk meg a „**kizáró vagy**” értelmét:

p	q	$p \nabla q$
i	i	h
i	h	i
h	i	i
h	h	h

A kizáró diszjunkció tehát akkor igaz, ha az egyik részítélet igaz, a másik hamis, és akkor hamis, ha a komponensek logikai értéke megegyezik.

Összeférhetetlenség:

Ön dönt: „Iszik vagy vezet.”

Az idézőjelbe tett mondatot nem úgy értjük, hogy ez csak akkor téves, ha nem is iszik, nem is vezet, a többi esetben igaz, azaz nyugodtan teheti mindkettőt is egyszerre. Nem is úgy, hogy egyszerre nem teheti hogy alkoholt fogyaszt és közben vezet, de valamelyiket folyamatosan végeznie kell. Ha nem éppen azt akarjuk kifejezni, hogy megteheti az egyiket, vagy külön a másikat, megteheti, hogy nem is iszik és nem is ül volán mellé, de egyszerre nem teheti mindkettőt: ez a két dolog összeférhetetlen.

Az értéktáblázatnak csak az első sorába kerül h, a többibe i.

p	q	p q
i	i	h
i	h	i
h	i	i
h	h	i

A köznap értelemben használt „vagy” szó jelentheti akár a megengedő, akár a kizáró diszjunkciót, vagy az összeférhetetlenséget. Az állítások értelmezése – a hangsúlyok, szövegösszefüggések figyelembe vételével – nem tartozik a matematikai logika feladatai közé; az ítéleteket az értelmezés után kell formalizálnunk, s csak ez után lép be gondolkodásunk segítségére a logika.

2.3 Negáció

Mielőtt a kétváltozós logikai műveleteket tovább vizsgálnánk, megismerkedünk egy egyváltozós művelettel, a negációval.

Bármilyen ítéletből a „nem” szó segítségével olyan új ítéletet képezhetünk, **amely hamis, ha az eredeti ítélet igaz volt, és igaz, ha az eredeti ítélet hamis**. Gondolkodásunknak egyik leggyakrabban alkalmazott logikai művelete a **negáció**, vagy **tagadás**. **Jele:** $\neg$

A negáció értéktáblázata:

p	$\neg p$
i	h
h	i

Nem szabad összetéveszteni a negálást az „ellenkezője” vagy „ellentettje” értelmével!

Pl. ha tagadjuk egy számról, hogy az *kisebb 100-nál*, ezzel nem azt fejeztük ki, hogy *nagyobb 100-nál*. Ugyanis lehet nagyobb, de lehet maga a 100 is.

Hasonlóan a pozitívnak ellentettje a negatív, de nem a tagadása. A pozitív tagadása a nem pozitív, ami egy számról azt fejezi ki, hogy az negatív vagy 0.

A köznyelvben is alkalmazzuk az „ellenkezője” megfogalmazását (pl. a fehér ellenkezője a fekete, a kicsinek a nagy, az óriásnak a törpe ...), ez a két ellentétes pólus kizárja egymást – ha az egyik igaz valamire, akkor az ellenkezője nem lehet igaz.

Aki összetéveszti a tagadást az „ellenkezője” kifejezésével, az csak annyit vár el a negációtól, hogy **ne lehessen igaz** egyszerre az eredeti állítással. **Egy állítás és a negáltja azonban egyszerre igaz sem, téves sem lehet!** Az alsó tagozatos gyerekek gondolkodásfejlesztésében megjelenik ennek a logikai műveletnek a használata; nagy gonddal kell ügyelni a „tagadás” tiszta fogalmának alakítására!

Különösen gyakran fordul elő az ellentettel való összetévesztés azoknak a mondatoknak a tagadásánál, amelyek egy összességről, halmazról állítanak valamit. (Lásd még: kvantifikáció.) Ha valaki azt mondja a tál gyümölcsre: „Mindegyik gyümölcs sárga”, ez ellen így tiltakoznak: „Nem: egyik sem sárga!” Természetesen nem lehet igaz mindkét mondat egyszerre ugyanarra a tál gyümölcsre nézve. De lehet, hogy mindkettő állítás téves, (pl. ha van sárga, zöld és piros gyümölcs is rajta), ebből látszik, hogy nem lehet az egyik tagadása a másiknak. (Az eredeti állítás tagadása: „Nem mindegyik gyümölcs sárga”, vagy másképpen: „Van a tálon nem sárga gyümölcs”.)

A konjunkció, a diszjunkció és a negáció tagadása

Mit értünk annak a mondatnak a tagadásán, hogy pl. „A kártyán álló szám páros és kétjegyű.”?

Olyan mondatot kell alkotnunk, ami éppen akkor hamis, amikor ez igaz és éppen akkor igaz, amikor ez hamis.

Mondhatjuk-e, hogy a fenti mondat tagadása a következő: „A kártyán álló szám páratlan és egyjegyű.”

Akárhány számot végigvizsgálhatunk, bármelyik áll is a számkártyán, nem lehet igaz mindkét mondat. Ha valóban páros kétjegyű szám áll rajta (pl. a 34, vagy 98), akkor biztosan hamis a második mondat. Ha egyjegyű, páratlan szám áll a kártyán, arra meg az előbbi mondat hamis. Azonban **mégsem tagadása** a második ítélet az elsőnek, mert egyszerre lehet mindkettő téves. Pl. ha a kártyán a 33, a 106, vagy a 8 áll.

Az idézőjelben álló mondat („A kártyán álló szám páros és kétjegyű.”) egy konjunkció, ennek a tagadását keressük.

A konjunkció értéktáblázatában **egyetlen esetet** találunk, **ahol igaz** a logikai érték, a többi esetben hamis. **Tagadása tehát egyetlen esetben hamis, a többi háromban igaz.**

	p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
Olyan ítéletet azonban diszjunkcióként is fel tudunk építeni, amely egy esetben hamis, a többi esetben igaz, mégpedig az eredeti komponensek tagadásaiból:	i	i	i	h	h	h	h
	i	h	h	i	h	i	i
	h	i	h	i	i	h	i
	h	h	h	i	i	i	i

Egy konjunkció $p \wedge q$ tagadása: $\neg(p \wedge q)$ tehát megfogalmazható olyan **diszjunkcióként** is, amelyben az eredeti mondat komponenseinek, **p-nek és q-nak a tagadása áll:**

$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$$

Ez tehát az eredeti példamondat tagadása: „A kártyán álló szám nem páros vagy nem kétjegyű.” Vagy így: „A kártyán álló szám páratlan, vagy nem kétjegyű.”

Hogyan fogalmazható meg annak az ítéletnek a tagadása, hogy „A kártyán álló szám 2-vel vagy 3-mal osztható.”? Tehát mit jelent ez a tagadás: „Nem igaz, hogy a kártyán levő szám osztható 2-vel vagy 3-mal.”

Azt jelenti, hogy „A kártyán álló szám nem osztható 2-vel vagy nem osztható 3-mal.”? Látjuk, hogy ez a mondat és az eredeti nem lehet téves egyszerre. De lehet mindkettő igaz (pl. ha a kártyán a 8 áll, vagy a 15 ...) – tehát nem tagadása egyik a másiknak!

Újra az értéktáblázat segítségével tudjuk felépíteni másképpen is azt a mondatot, amelynek igazságértéke sehol sem egyezik az eredeti mondat igazságértékével. A **$p \vee q$ egyetlen esetben hamis**, ha p is, q is hamis, a többi esetben igaz, ezért **a tagadása egyetlen esetben igaz**, a többiben hamis.

Olyan **konjunkciót** kell ezért keresni, amelynek a komponensei akkor igazak, amikor az eredeti mondat komponensei hamisak. Tehát értéktáblázattal igazolható, hogy:

$$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$$

Ez a mondat: „Nem igaz, hogy a kártyán levő szám osztható 2-vel vagy 3-mal.”, azonos értelmű azal, hogy „A kártyán levő szám sem 2-vel, sem 3-mal nem osztható.”.

Szintén az értéktáblázatából közvetlenül leolvasható, hogy **egy ítélet negáltjának a tagadása** az eredeti ítélettel azonos.

$$\neg(\neg p) = p$$

Ez teszi jogossá azt a fogalmazást, hogy két ítélet „egymás tagadása”.

2.4 Implikáció

„Egy országban igen elterjedt a csekk, mint fizetőeszköz. Az egyszerűsítés érdekében azt fogadták el, hogy nem kell minden csekket aláírni, de ha 1000 Ft-nál nagyobb az összeg, akkor csak aláírva érvényes.

A következő csekkek kerültek a postáskisasszony elé, az egyik a pénzes oldalon, a másik az aláírás oldalán:

3450 Ft	570 Ft	Ferenczi	
---------	--------	----------	--

Melyik csekket kell megfordítani ahhoz, hogy eldönthesse, érvényes-e a csekk?”

(Mérő László példája nyomán; Mérő: Észjárások)

A megoldást bárki átgondolhatja minden matematikai logikai előképzettség nélkül. Nincs kétségünk afelől, hogy az első csekket meg kell nézni, van-e aláírás. Azt is biztosan elfogadja mindenki, hogy a harmadik csekk érvényes függetlenül attól, hogy hány forintról szól. A második csekk szintén érvényes, akár alá van írva, akár nincs, nem kell megnézni a túlsó oldalt. Az utolsó csekket azonban megfordítjuk, hogy dönthessünk az érvényességéről.

Ha az előbbi szabályt tartalmazó mondatot logikailag értelmezzük, akkor azt két egyszerű ítéletre bonthatjuk: A: 1000 Ft-nál nagyobb az összeg. B: Csak aláírva érvényes.

A két ítéletet a **ha, akkor** kötőszavak kapcsolják össze. Értelmezzük ezt a műveletet.

A „**Ha A, akkor B**” szerkezetű mondatot **implikációnak** nevezzük. Az A az **előtagja**, B az **utótagja**. Hamisnak tekintjük, ha az előtag igaz, az utótag nem igaz, hiszen éppen ezt köti meg ez a nyelvtani szerkezet. Minden egyéb esetben igaznak fogadjuk el – ahogy érvényesnek fogadtuk el az 1000 Ft-nál nem nagyobb összegről szóló csekket aláírva és aláírás nélkül egyaránt.

Az implikáció értéktáblázata:

a	b	a→b
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

Azt is mondjuk, hogy A elégséges feltétele B-nek, és azt is kifejezi ez a művelet, hogy B szükséges velejárója A-nak. (A matematikusok ez utóbbi esetben is „feltétel” szót használnak: az előtag

szükséges feltételének nevezik az utótagot; de talán a fent használt köznyelvi kifejezés könnyebben érthetővé teszi a két elemi ítélet kapcsolatát az implikáció teljesülése esetén.)

Az előtag elégséges feltétele az utótagnak: ezt úgy érthetjük meg, hogy igaz összetett állítás esetén amennyiben az előtag igaz, ez biztosítja annak, hogy az utótag is igaz. Éppen ezt fejezi ki anyanyelvünk a ha ..., akkor szófordulattal. A „Ha esik az eső, akkor vizes a járda.” állítás ezt fejezi ki: elegendő tudnunk, hogy esik az eső, ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy vizes-e a járda.

Amikor azonban ez az összetett állítás igaz, (azaz állíthatjuk, hogy semmi nem óvja a járdát az esőtől), ezzel nem fejezzük ki egyúttal azt is, hogy a járda vizességéhez szükséges az eső. Hiszen ez más módon is elérhető (pl. locsolással).

Azt, hogy az előtag elégséges feltétele az utótagnak, az értéktáblázatban azzal a ténnyel köthetjük össze, hogy **amikor az implikáció igaz, akkor elegendő az előtag igaz volta ahhoz, hogy az utótag is igaz legyen.** (Ugyanakkor azonban az utótag olyankor is lehet igaz, amikor az előtag hamis, ezért nem mondhatjuk, hogy az utótag igazságához szükséges az előtag igaz volta.)

Az utótag szükséges velejárója az előtagnak. Ez a kijelentés arra utal, hogy ha látjuk, hogy vizes a járda, akkor tudjuk, hogy eshetett az eső. (Azaz a járda vizességének ismerete szükséges ahhoz, hogy ne zárhassuk ki, hogy esett az eső.) A vizes járda **szükségszerűen együtt jár** az esővel. (Emellett azonban nem elégséges látnunk a vizes járdát ahhoz, hogy kiderítsük, vajon tényleg esett-e az eső.)

Az értéktáblázatban ezt az mutatja, hogy **amikor igaz az implikáció, akkor az előtag csak úgy igaz, ha az utótag is igaz.** Az igaz értékű implikáció esetén az utótagnak szükségképpen igaznak kell lennie, hogy az előtag igaz lehessen.

Nézzünk egy matematikai példát konkrét esetre. (A példánkban egy előttünk álló háromszögről lesz szó. Hogy mégis többfélét rajzoltunk ide, annak az a szerepe, hogy gondolni tudjunk a többféle lehetőségre.)

„Ha a háromszög egyenlő oldalú, akkor van két egyenlő szöge.”

A részítéletek: R: A rajzolt háromszög egyenlő oldalú.
S: Van két egyenlő szöge.

Milyen lehetne a rajzolt háromszög?

Lehet egyenlő oldalú, amelynek van egyenlő szögpárja.

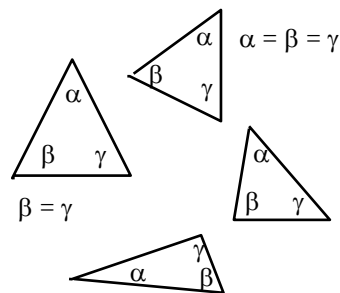
Lehetne egyenlő oldalú, amelynek nincs egyenlő szögpárja (de persze ilyet nem tudunk rajzolni!)

Lehet nem egyenlő oldalú, amelynek van egyenlő szögpárja.

Lehet nem egyenlő oldalú, amelynek nincs egyenlő szögpárja.

Az $R \rightarrow S$ implikáció szerint elegendő tudnunk a háromszögről, hogy egyenlő oldalú, ahhoz, hogy ránézés nélkül eldönthessük: van két egyenlő szöge. Természetesen nem szükséges, hiszen minden egyenlő szárú háromszögnek van két egyenlő szöge, ehhez nem kell a harmadik oldalnak is ugyanakkorának lennie.

Az is igaz, hogy az egyenlő két szög szükségszerű velejárója az egyenlő oldalúságnak.



Normálalak

Az implikáció táblázatában észrevehetjük, hogy csak egyetlen sorában van h érték éppúgy, mint a megengedő diszjunkcióban, (csak nem abban a sorban, amelyben mindkét komponens hamis). Tűntessük fel táblázatunkban a mellett a *nem-a-t* is! Így meg tudunk fogalmazni egy olyan diszjunkciót, amely éppen abban a sorban hamis, mint az $a \rightarrow b$ implikáció:

a	b	$\neg a$	$a \rightarrow b$	$\neg a \vee b$
i	i	h	i	i
i	h	h	h	h
h	i	i	i	i
h	h	i	i	i

Azt találjuk, hogy az $a \rightarrow b$ pontosan azt fejezi ki, mint $a \rightarrow b$.

Sok esetben célszerű a formulákat olyan alakra hozni, amelyben az „és”, „vagy” szavak mellett csak az elemi ítéletekre vonatkozó „nem” szerepel. Az ítéleteknek ilyen formáját **normálalaknak** mondjuk. Az implikációnak az előbb megalkotott formája a normálalakja.

Nem igazoljuk, de tudnunk kell, hogy minden összetett állítás felírható normálalakban.

Az implikáció még egy alakja (Kontrapozíció)

Gyakran tudjuk könnyebben használni az eredetileg megfogalmazott $a \rightarrow b$ szerkezetű mondat helyett azt, hogy $\neg b \rightarrow \neg a$, mert pl. azt tudjuk, hogy $\neg b$. Bizonyítsuk be, hogy $a \rightarrow b = \neg b \rightarrow \neg a$! (Értéktáblázattal, önálló feladat!)

2.5 Ekvivalencia

Előfordul, – pl. bizonyos hangsúlynak megfelelően, – hogy egy „ha ... akkor” fogalmazású magyar mondatot másképpen értelmezzünk, mint a matematikában. Pl. „Ha megtanultad a leckét, akkor elmegyünk a moziba.” Ebben a mondatban nemcsak ígéret van benne. Azt is beleértjük általában, hogy lecke után elmegyünk, „de csak akkor megyünk, ha megtanultad a leckét, egyébként nem”.

Ha így gondoltuk, akkor ebben nemcsak a „ha ..., akkor”-t értettük bele, hanem azt a szigorúbb megkötést is, hogy „akkor, és csak akkor megyünk, ha megtanultad a leckét”. Ez a gondolati szerkezet egyenrangúvá teszi a két ítéletet: akkor fogadjuk el igaznak az ily módon képzett összetett ítéletet, ha a komponensek logikai értéke megegyezik. Az „**akkor, és csak akkor ... ha**” szavakkal kifejezett logikai művelet neve: **ekvivalencia**.

Példánk pontosított ígéretét akkor teljesítjük, ha a lecke elkészülte esetén elmegyünk a moziba, ha pedig nem készül el a házi feladat, akkor nem. Ha a lecke elkészül, mégsem megyünk moziba a gyerekekkel, akkor joggal érezheti becsapva magát, ha pedig a feladat teljesítése nélkül is eleget teszünk a kérésének, következetlenek vagyunk, szintén nem a kikötés szerint járunk el.

Amikor egy anyanyelvünkön megfogalmazott mondatot „lefordítunk” a matematikai logika nyelvére, akkor arra vagyunk ráutalva, hogy eldöntsük, igaznak vagy tévesnek ítéljük-e a mondatot a részütéletek igaz illetve téves volta esetében. Ezért nem mondhatjuk ki eleve, anélkül, hogy meggondolnánk, miképpen is értjük az állítást, hogy az ilyen és ilyen kifejezések pl. ekvivalenciát hoznak létre.

A műveletet a szóhasználatnál pontosabban határozza meg az értéktáblázata.

Az ekvivalencia értéktáblázata:

a	b	$a \leftrightarrow b$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i

Az ekvivalenciát így is fogalmazzuk: „ a szükséges és elégséges feltétele b -nek”. Ennek megfelelően az ekvivalencia két implikáció konjunkciójával is kifejezhető:

$$a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$$

Bizonyítsuk be, hogy $a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$

(Mit jelent az, hogy bebizonyítjuk két ítéletről, hogy azonos a jelentésük? A részítéletek összes lehetséges logikai értékvariációja esetén ellenőrizzük, vajon megegyezik-e a két kifejezés logikai értéke. Ha igen, akkor a kifejezések különbözősége ellenére is ugyanazt állítja a két kijelentés. Ha viszont csak egyetlen esetben is különbözne ez az érték, akkor nem egyező értelműek az ítéletek.)

Képezzük tehát most az $a \leftrightarrow b$ -t és az $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$ -t, és sorról-sorra ellenőrizzük, hogy azonos-e a két kifejezés logikai értéke!

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$a \leftrightarrow b$	$(a \rightarrow b)$	$\neg a \rightarrow \neg b$	$(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$
i	i	h	h	i	i	i	i
i	h	h	i	h	h	i	h
h	i	i	h	h	i	h	h
h	h	i	i	i	i	i	i

A két vastagon szedett oszlop soronkénti megegyezése mutatja, hogy a két kifejezéssel leírt állítás értelme azonos.

Az ítéletekkel végzett műveletek áttekintéseként foglaljuk össze a kétváltozós logikai műveletek lehetséges értékeit! Ezt úgy tesszük, hogy rendszeresen kitöltjük az oszlopokat az i és h betűkkel minden lehetséges módon, s utána a „fejlécbe” beírjuk azt a műveletet, amelyet az értéktáblázat megad. Lesznek „ismerős” esetek, de felismerünk olyan eseteket is, amelyek csak az egyik állítás igazságától függnének, sőt olyan esetek is lesznek, amelyek mindkettőtől függetlenek.

p	q	i	$p \vee q$	$q \rightarrow p$	$p \rightarrow q$	$p \mid q$	p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \vee q$	$\neg q$	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge q$	$\neg p \wedge \neg q$	h
i	i	i	i	i	i	h	i	i	i	h	h	h	i	h	h	h	h
i	h	i	i	i	h	i	i	h	h	i	i	h	h	i	h	h	h
h	i	i	i	h	i	i	h	i	h	i	h	i	h	h	i	h	h
h	h	i	h	i	i	i	h	h	i	h	i	i	h	h	h	i	h

A 3. és az utolsó oszlop független a p és q értékétől: az előbbi azonosan igaz, az utóbbit azonosan hamis ítéletnek mondjuk. Négy olyan oszlopot találunk, amely igazán csak az egyik állítás igazságától függ, a másiktól független. A többi pedig mind megfogalmazhattuk a megismert műveletekkel.

Logikai függvény, nyitott mondat

1. Alapok

Azt mondtuk, hogy kijelentő mondataink ítéletek, állítások, ha van határozott logikai értékük. Ítéleteink között megkülönböztettünk egyszerűeket és összetetteket aszerint, hogy már további, logikai értékkel rendelkező ítéletekre nem bonthatók fel, vagy felbonthatók ilyenekre.

Azonban, ha egy egyszerű ítéletet tovább vizsgálunk, megkülönböztethetünk benne alanyt, (alanyokat) és állítmányt – matematikai szakszavakkal: **individuumot és prédikátumot**. (A logika a nyelvtani alany bővítményeit az alanyba sűríti bele, a nyelvtani állítmány bővítményeit az állítmányba).

Ha ki akarjuk fejezni az individuum és a prédikátum kapcsolatát, akkor – furcsa módon – az állítmányt szoktuk nagybetűvel jelölni, s amire vonatkozik, amiről állít valamit, azt utána, kisbetűvel, zárójelben.

Pl. Ha azt állítom, hogy „A hat páros szám.”, ezt mint elemi ítéletet így jelölhattük: P. A mondat állítmánya az, hogy páros szám, s amire vonatkozik a kijelentés, az a 6. A kijelentés szerkezetét a $P(h)$ mutatja: páros szám a hat.

Egy állítmány két vagy több logikai alany közti kapcsolatot is kifejezhet.

Pl. ha azt állítom, hogy a 6-nak osztója a 2, ez a kijelentés értelmezhető így is: az állítmány az „osztója”, s ez a 6-ot és a 2-t köti össze: osztója 6-nak a 2: $O(6, 2)$.

Erre az elemzésre azért van szükség, mert gyakran fordul elő, hogy a mondatban hiányzik az individuum, azaz változó helyettesíti, amely képviseli a szóba jöhető alanyokat.

Pl. Az első mondatunkból elhagyhatjuk a konkrét alanyt, és azt mondjuk, hogy „A páros szám.”, vagy így: „x páros szám.” Jelekkkel: $P(x)$. Így a mondatunk elvesztette a logikai értékét: nem mondhatjuk sem igaznak, sem tévesnek.

Vagy a második példánkban elhagyjuk a két alanyt: „A-nak osztója a”, „a-nak osztója b”. Jelekkkel: $O(a, b)$. Elhagyhatjuk az egyik alanyt, pl. „A ...-nak osztója a 2”, és így az első $P(x)$ -szel azonos mondat-formát kapunk.

Definíció: Adjunk meg egy alaphalmazt! Egy mondat-forma, amely az állítmányt tartalmazza, de az alanya helyén az alaphalmaz egy-egy elemét képviselő változó áll, logikai függvényt ad meg. A logikai függvény értelmezési tartománya a megadott alaphalmaz, értékkészlete pedig a két lehetséges logikai értékből álló halmaz: $\{i, h\}$.

Amikor a logikai függvény változója helyébe az alaphalmaz egyes elemeit tesszük, ezáltal ítéletté válik a mondat-forma: határozott logikai érték tartozik hozzá.

Előbbi példánkat tegyük teljessé azzal, hogy pl. válasszuk meg alaphalmaznak a 10-nél kisebb természetes számok halmazát. A páros szám.” mondat-formában a pontsor képviseli az alaphalmaz számait. Ha ezeket a számokat rendre beletesszük az alany helyére, akkor ilyen állításokat kapunk: A 0 páros szám. → Ez igaz

Az 1 páros szám. → Ez hamis.

A 2 páros szám. → Igaz.

....

És persze ezek közül valamelyik ítélet igaz, a másik nem igaz. Így rendeli a függvényünk a 0-hoz az „igaz” logikai értéket, az 1-hez a „hamis” értéket, a 2-höz ismét az „igaz”-at ...

A logikai függvényt az alsó tagozaton **nyitott mondatnak** nevezzük, hiszen ez a kifejezés jól jelzi, hogy amíg konkrét elemeket nem helyettesítünk a változó helyébe, addig nincs logikai értéke, nyitott. (Később a behelyettesítésen kívül szó lesz a nyitott mondatok másfajta lezárásáról is.)

Definíció: Az alaphalmaznak azt a részhalmazát, amelynek elemei az adott mondat-formát igaz ítéletté változtatják, a logikai függvény, vagy nyitott mondat igazsághalmazának nevezzük.

Jegyezzük meg, hogy egy nyitott mondat megoldása mindig a teljes igazsághalmaz meghatározását jelenti. (Nem szerencsés az a szokásos kifejezés, hogy pl. az előbbi nyitott mondatnak egy megoldása a 2, de mert elterjedt, jól külön kell tudnunk választani a „megoldás” szónak ezt az értelmét a logikai értelmezéstől.)

A változók száma szerint egy- és többváltozós logikai függvényekről, egy- és többváltozós nyitott mondatokról beszélünk. Az egyváltozós nyitott mondat alaphalmaza elemeket, a kétváltozósé, rendezett elempárokat tartalmaz. Ez az elempárok halmaza természetesen felfogható két halmaz direkt-szorzatának is.

2. Műveletek nyitott mondatokkal

A nyitott mondatokkal, logikai függvényekkel éppúgy értelmezhetünk műveleteket, mint az ítéletekkel: egy, két vagy több nyitott mondathoz nyitott mondatot rendelünk hozzá. Sőt éppen ugyanazokat a műveleteket fogjuk értelmezni körükben, mint az ítéletek körében.

Halmazok körében a résztvevő halmazok elemei segítségével definiáltuk a műveleteket: azt adtuk meg, hogy a hozzájuk rendelt halmaz az egyes komponensek mely elemeit tartalmazza, illetve azt, hogy miképpen épülnek az „eredményhalmaz” elemei a komponensek elemeiből (lásd direkt-szorzat halmaz).

Az ítéletek körében a kiinduló ítéletek logikai értékéhez kötöttük az új ítéletet: azt adtuk meg, hogy a komponensek mely logikai értékénél legyen a keletkező ítélet igaz, melyeknél téves.

De hogyan érthetjük a nyitott mondatokon végzett műveleteket?

2.1 Negáció

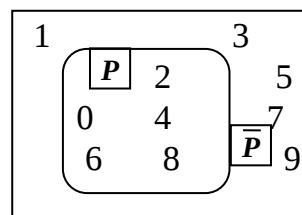
Hogyan értsük egy nyitott mondat negációját?

Hogyan értsük ezt a nyitott mondatot: „Nem igaz, hogy x páros.”, hiszen az „ x páros” nyitott mondatnak sincs igazságértéke: nem mondhatjuk rá, hogy igaz, sem azt, hogy nem igaz.

Először is azt kell megjegyezni, hogy **a tagadás az állítmányra vonatkozik**. Nem azt mondja az állításunk, hogy „nem az x páros”, hanem azt, hogy „az x nem páros”.

Képezzük az „ x páros” nyitott mondat igazsághalmazát az előbb megválasztott I halmazon! Jelöljük ezt az igazsághalmazt P -vel!

A nyitott mondat tagadásaként megfogalmazott nyitott mondatnak is meghatározzuk az igazsághalmazát ugyanazon az alaphalmazon: ez a P komplementuma. A P komplementumát meghatározó tulajdonság a P állítmányának tagadása.



Definiáljuk egy nyitott mondat tagadását azáltal, hogy a nyitott mondathoz hozzárendeljük az igazsághalmazát, és így azt mondjuk, hogy **a $\neg P(x)$ olyan nyitott mondat, melynek igazsághalmaza a $P(x)$ nyitott mondat igazsághalmazának komplementuma.** Ez a $\neg P(x)$ nyitott mondat tehát éppen azokra az elemekre igaz, amelyekre a $P(x)$ hamis volt, és azokra hamis, amelyekre az igaz.

A nyitott mondatok körében a továbbiakban is azáltal fogjuk értelmezni a **logikai műveleteket**, hogy a **keletkező nyitott mondat igazsághalmazának az elemi nyitott mondatok igazsághalmazához való viszonyát adjuk meg.**

2.2 Konjunkció

Definíció: Egy $P(x)$ és egy $Q(x)$ nyitott mondat konjunkcióján azt a $P(x) \wedge Q(x)$ összetett nyitott mondatot értjük, amelynek igazsághalmaza a $P(x)$ nyitott mondat igazsághalmazának és a $Q(x)$ nyitott mondat igazsághalmazának a metszete.

Például vegyünk a 20-nál nem nagyobb természetes számok alaphalmazán a következő két nyitott mondatot:
 $P(x)$: x egyjegyű. $Q(x)$: x prím.

$P(x)$ igazsághalmaza: $P = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $Q(x)$ igazsághalmaza: $Q = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$. Ekkor a $P(x) \wedge Q(x)$ szimbólummal jelölt „ x egyjegyű és prím.” nyitott mondatot úgy értelmezzük, amelynek igazsághalmaza: $\{2, 3, 5, 7\}$, P és Q közös része.

A legfontosabb műveleti tulajdonságok a definíció alapján a halmazműveletek tulajdonságaira vezethetők vissza. Így igazolható a nyitott mondatok körében értelmezett konjunkció **kommutativitása** (aminek végiggondolását az olvasóra bizzuk), **asszociativitása** (ezt mintaként végiggondoljuk most).

A konjunkció asszociatív művelet

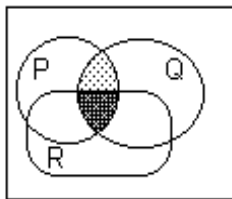
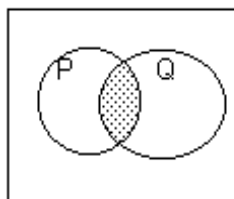
Azt kell megmutatnunk tehát, hogy bármely $P(x)$, $Q(x)$ és $R(x)$ ugyanazon I alaphalmazon értelmezett három nyitott mondatra a

$$(P(x) \wedge Q(x)) \wedge R(x) = P(x) \wedge (Q(x) \wedge R(x)) = P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x)$$

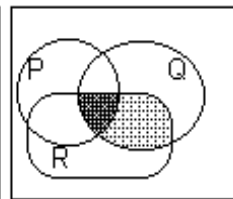
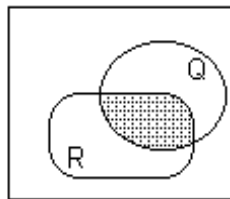
Az utolsó, zárójel nélküli alakhoz először is kimondjuk, hogy három (vagy több) nyitott mondat konjunkcióját is értelmezhetjük olyan nyitott mondatként, mint amelynek igazsághalmaza a komponens nyitott mondatok igazsághalmazainak metszete.

Az asszociativitást megfogalmazó összefüggés igazolásához tehát azt kell megmutatni, hogy a $(P(x) \wedge Q(x)) \wedge R(x)$ igazsághalmazának és az $R(x)$ igazsághalmazának a metszete ugyanaz, mint a $P(x)$ igazsághalmazának és a $(Q(x) \wedge R(x))$ igazsághalmazának a metszete.

$$(P(x) \wedge Q(x)) \wedge R(x)$$



$$P(x) \wedge (Q(x) \wedge R(x))$$



Minthogy a halmazok körében már beláttuk a metszet műveletre vonatkozó asszociativitást, az értelmezéssel együtt igazoltuk a nyitott mondatok konjunkciójával kapcsolatos asszociativitást.

2.3 Diszjunkció

Definíció: Legyen adva a $P(x)$ és a $Q(x)$ nyitott mondat egy I alaphalmazon, s legyen a két nyitott mondat igazsághalmaza a P és a Q halmaz.

A $P(x) \vee Q(x)$ szimbólummal jelölt nyitott mondatot azáltal adjuk meg, hogy igazsághalmaza legyen ugyanezen az alaphalmazon a P és Q halmaz uniója.

A fenti példánkban értelmezett két nyitott mondat diszjunkciója: „ x egyjegyű vagy prím.” Ennek a nyitott mondatnak a megoldása, igazsághalmaza a $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 17, 19\}$ halmaz, amelybe tehát beletartozik minden szám, amely P és Q közül legalább az egyiknek eleme.

A halmazt meghatározó tulajdonság, (amely tehát ezekre és csak ezekre a számokra igaz), „egyjegyű vagy prím”, s a vagy szót itt „megengedő” értelemben használjuk. (Felsorolással mondhatjuk, hogy e halmazban benne van az összes egyjegyű szám és az összes prím. A minden elemre külön-külön igaz tulajdonság azonban a két komponens nyitott mondat igazsághalmazát meghatározó tulajdonságból a „vagy” szóval kapcsolható össze.)

A műveleti tulajdonságok közül – a kommutativitás, asszociativitás mellett, amelyek igazolását az olvasó önállóan elvégezheti – most is kiemeljük a kétféle disztributivitást. Nemcsak az igaz, hogy a

$$(P(x) \vee Q(x)) \wedge R(x) = (P(x) \wedge R(x)) \vee (Q(x) \wedge R(x))$$

hanem az is, hogy

$$(P(x) \wedge Q(x)) \vee R(x) = (P(x) \vee R(x)) \wedge (Q(x) \vee R(x))$$

Pl. legyen az alaphalmaz a Budapesti Tanítóképző Főiskola jelenlegi nappali tagozatos 1. éves tanító szakos hallgatóinak halmaza. $P(x)$: „ x énekkaros” $Q(x)$: „ x budapesti lakos”, $R(x)$: „ x hangszeren játszik” Az $=$ jel baloldalán álló formula annak a nyitott mondatnak felel meg, hogy: „(x énekkaros és budapesti lakos), vagy játszik valamilyen hangszeren.” (A hangsúlyunk, a beszédünk ritmusa kifejezi azt a szorosabb összetartozást, amit írásban legfeljebb zárójelezéssel tudunk egyértelművé tenni.) A jobboldali formula pedig egy ilyenféle mondatot formalizál: „ x énekkaros vagy hangszeren játszik, de egyben budapesti lakos vagy játszik valamilyen hangszeren.”

(Igazolását gyakorlásképpen célszerű önállóan elvégezni.)

2.4 A nyitott mondatok közt értelmezett implikáció

Eddig a nyitott mondatok közt végzett műveletek értelmezésében az igazsághalmazokhoz, azok körében végzett halmazműveletekhez tudtunk fordulni. Hogyan értelmezzük a nyitott mondatok körében az implikációt?

Nézzünk először egy példát erre az esetre!

Vegyük ismét a 20-nál nem nagyobb természetes számok alaphalmazán a következő két nyitott mondatot:

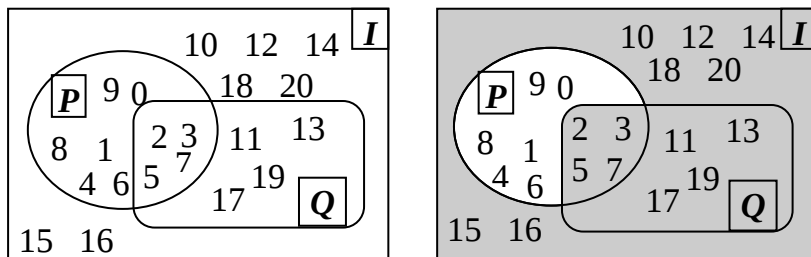
$P(x)$: x egyjegyű.

$Q(x)$: x prím

Értelmezzük a $P(x) \rightarrow Q(x)$ nyitott mondatot: „Ha az x szám egyjegyű, akkor prím.” Mely számokra igaz ez a nyitott mondat?

Ábrázoljuk $P(x)$ és $Q(x)$ igazsághalmazát, és – az alaphalmaz elemeinek behelyettesítése után – döntsük el a lezárt implikációkról, hogy az egyes elemekre igazak-e vagy nem!

Pl. igaz-e, hogy „Ha a 3 egyjegyű, akkor prím.”? „Ha a 12 egyjegyű, akkor prím.”? „Ha a 6 egyjegyű, akkor prím.”?... – Az ítéletek körében már ismert művelet segítségével kiválaszthatjuk az összes számot az alaphalmazból, amely igazzá teszi a nyitott mondatot.



Azt tapasztaljuk, hogy minden szám igazzá teszi, amely nincs benne a $P \cap Q$ halmazban. Mondhatjuk, hogy a $P \cap Q$ komplementuma a fenti nyitott mondat igazsághalmaza.

2.5 Ekvivalencia

Akkor és csak akkor $P(x)$, ha $Q(x)$. Mi az igazsághalmaza ennek a nyitott mondatnak? Az alaphalmaznak az a része, amelyben az elemek mindkét nyitott mondatot igazzá teszik, vagy mindkét nyitott mondatot hamissá teszik. Azaz amelynek elemeire megegyezik a két nyitott mondatból alakuló ítélet igazságértéke. Ez a két igazsághalmaz szimmetrikus differenciájának a kiegészítő halmaza.

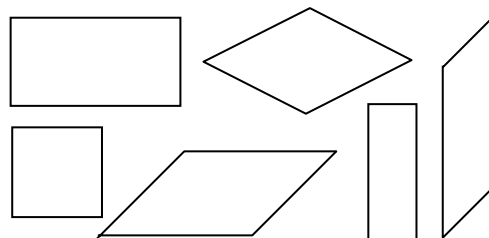
3. Kvantifikáció; kvantoros állítások és tagadásuk (ilyen állítások körében végzett műveletek konkrét példákon.)

3.1 A kvantoros állítások értelmezése

A nyitott mondatokból nemcsak úgy tudunk állításokat létrehozni, hogy az alaphalmaz elemeit behelyettesítjük a változó helyébe, hanem úgy is, ha azt fejezzük ki, hogy mi a mondatunk érvényességi köre, az alaphalmaz milyen részére vonatkoztatjuk.

Például legyen az alaphalmaz ezeknek a paralelogrammáknak a halmaza, és a mondat-forma, amellyel a nyitott mondatot értelmezzük: „ x tengelyesen szimmetrikus.”

Lezárhatjuk a nyitott mondatot azáltal, hogy rendre beillesztjük a hat elem bármelyikét. Így igazzá, vagy nem igazzá, tehát **kijelentéssé, ítéletté** válik a nyitott mondat.



De megtehetjük azt is, hogy kijelentjük: „Mindegyik paralelogramma tengelyesen szimmetrikus.” Vagy szólhat így is a lezárás: „Egyik paralelogramma sem tengelyesen szimmetrikus.” Ismét ítéletet kapunk, ha így egészítjük ki: „Van köztük tengelyesen szimmetrikus paralelogramma.”, vagy így: „Nincs olyan paralelogramma, amely tengelyesen szimmetrikus volna.”

A „mindegyik”, („mind”, „minden”), „nem mind”, „van köztük”, „nincs olyan...” „egyik sem” kifejezéseket kvantoroknak nevezzük. A velük való lezárást kvantifikációnak.

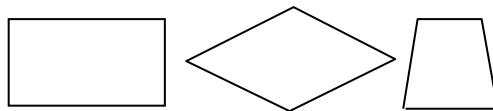
A „mindegyik”, „minden...” kifejezéssel a teljes alaphalmazra, az univerzumra vonatkoztatjuk a kijelentésünket, ezt **univerzális kvantornak** nevezzük. **Jele:** $\forall$.

Az első mondatunkat tehát így formalizáljuk: $\forall x T(x)$, és így olvassuk: minden x $T(x)$, azaz példánkban: mindegyik paralelogramma tengelyesen szimmetrikus. Természetesen ez a kijelentés nem

igaz. Cáfolni azáltal lehet az univerzális kijelentést, hogy felmutatunk **egyetlen ellenpéldát**. (A legáltalánosabb paralelogramma cáfolja a mondat igazságát.)

A „**van olyan...**” kvantorral azt fejezzük ki, hogy az alaphalmaznak legalább egy eleme igazá teszi a nyitott mondatot, hogy létezik olyan paralelogramma, amely tengelyesen szimmetrikus. Neve: **egzisztenciális kvantor**, **jele**: $\exists$. Mondatunkat így formalizáljuk: $\exists x T(x)$. Ez a kijelentés igaz, és az egzisztenciális állítás igazolására elegendő **egyetlen példa** felmutatása. (A négyzet, a rombusz vagy a téglalap igazá teszi a nyitott mondatot.)

Vegyük most egy másik alaphalmazt, értelmezzük a $T(x)$ nyitott mondatot ezen, és nézzük meg, hogy igaz-e a kétféle kvantorral lezárt állításunk.



Most mindkét állítás igaz: az új alaphalmazon nincs ellenpélda és van példa a tengelyesen szimmetrikus síkidomra.

A kvantifikáció, a kvantifikált állítások a gondolkodásunkban azért játszanak fontos szerepet, mert az ismeretek általánosítását ezzel a gondolati tevékenységgel hajtjuk végre. Ezért az előbbi két megjegyzést még egyféle formában megközelítjük.

3.2 Mit jelent a fenti típusú mondatok tagadása?

Azt mondtuk, hogy a „Minden...” típusú állítások mindaddig igazak, amíg nincs rá ellenpélda. Megállapítottuk az első alaphalmazban, hogy a $\forall x T(x)$ állítás hamis, ennek tehát a negációja kell, hogy igaz legyen. A $\forall x T(x)$ negáltja a $\neg \forall x T(x)$, ahol !!! a „**nem**” szó nem az állítmányra vonatkozik, mint a nem kvantoros ítéletek esetében, hanem a kvantorral összekapcsolt alanyra!!! Ha az igaz, hogy **nem minden paralelogramma tengelyesen tükrös**, akkor ez éppen azt jelenti, hogy **van olyan paralelogramma, amely nem tengelyesen tükrös**.

Vegyük most másik nyitott mondatot szintén az első alaphalmazon: $K(x)$ jelentse azt, hogy „ x középpontosan szimmetrikus.” Zárjuk le a nyitott mondatot az univerzális kvantorral: $\forall x K(x)$ azt formalizálja, hogy „Mindegyik síkidom középpontosan szimmetrikus”. Ez a mondat igaz, hiszen alaphalmazunkban mindegyik elem igazá teszi a nyitott mondatot. Ez azt is jelenti, hogy nem tudunk olyan lapot mutatni, amely ne lenne középpontosan szimmetrikus. Ha a $\forall x K(x)$ igaz, akkor a tagadása nem igaz. A $\neg \forall x K(x)$ tehát egyszerre lesz hamis azzal a kijelentéssel, hogy $\exists x \neg K(x)$.

Azonos alaphalmazon értelmezett nyitott mondatokkal kapcsolatban úgy gondolkodtunk (a műveletek értelmezése során), hogy **azonos a jelentésük, ha azonos az igazsághalmazuk**, azaz, ha pontosan ugyanazokra az elemekre igaz az egyik nyitott mondat, mint a másik. (Ebben persze az is benne van, hogy pontosan ugyanazokra az elemekre hamis az egyik, mint a másik.)

A kvantoros állításokra vonatkozóan pedig ez igaz: **két kvantoros állítás azonos jelentésű, ha bármely alaphalmazban megegyezik az igazságértékük.**

A $\neg \forall x T(x)$ kijelentés pontosan ugyanazokban az alaphalmazokban igaz, mint a $\exists x \neg T(x)$. Sőt a T állítás konkrét tartalmától függetlenül fennáll ez az egyezés:

$$\neg \forall x T(x) = \exists x \neg T(x)$$

Speciálisan az **üres halmazzal kapcsolatban** kell még egyszer megerősítenünk ezt a jelentésazonosságot. A mindennapi életben kicsit másképpen gondolkodunk, de a matematika szükségképpen ezekre a szélső esetekre is kiterjeszti az egyértelmű értelmezést.

Valaki egy irodából kilép, és kijelenti, hogy a falon látható összes kép eredeti Munkácsy kép. Ha most benézünk, és azt látjuk, hogy egyetlen kép sincs a falakon, hajlamosak vagyunk a nagyzó kijelentést hazugságnak ítélni. Pedig a kihívott festmény-szakértő nem fog tudni mutatni a falon egyetlen hamisítványt, vagy más festőtől való képet sem.

Ez az eset nagyon hasonlít arra, mintha azt állította volna az illető, hogy **ha** van a falon kép, **akkor** az eredeti Munkácsy-kép.

A matematika a „minden...” kifejezést valóban így érti. Ez cseng össze azzal az előbbi gondolat-tal, hogy az ellenpéldát jelentő egyetlen elem cáfolja az ilyen állítás igazságát. Ha tehát nincs ellen-példa (amelyre az előtag igaz, az utótag nem), akkor igaznak fogadjuk el.

Jól belegondolva nem azért érezzük becsapva magunkat, mintha nem tudnánk elfogadni, hogy igaz az állítás, hanem azért, mert csúsztatást látunk benne. Mert az elbeszélőnek éppen az a szándé-ka, hogy – bár igazat mond, mégis – a nem igaz többet higgyük. (Ő később is védekezhet így: nem állította, hogy van kép a falon, akkor ugyanis hazudott volna.)

Tapintsuk ki a „van olyan...” típusú állítások igazságának határait. Mondtuk, hogy igaz az állítás, ha akárcsak egyetlen elem igazzá teszi a nyitott mondatot.

Vegyük most a $K(x)$ nyitott mondatot. Második alaphalmazunkban nem gond igazolni, hogy a $\exists x K(x)$ állítás igaz. Azt is láttuk, hogy úgy válik nem-igazzá az állítás, ha az összes „példát” jelentő elemet eltávolítjuk a halmazból, tehát a halmazra az lesz igaz, hogy „Minden eleme nem középpon-tosan szimmetrikus.” Ebből a második alaphalmazból egyetlen elem marad, ha kivesszük a közép-pontosan szimmetrikus elemeket, hogy hamissá tegyük az állítást. Mi marad az első halmazból, ha itt is el akarjuk érni, hogy rajta hamissá váljon? – Az üres halmaz.

Az üres halmazra tehát igaz a $\forall x T(x)$ és a $\forall x \neg T(x)$ is, és ez az egyetlen ilyen tulajdonságú hal-maz. **Vigyázat!** E két mondat nem tagadása, nem negációja egymásnak! Ezt éppen azzal lehet egy-szerűen igazolni, hogy – íme – van olyan eset, amelyre a két mondat mindegyike igaz!

Térjünk vissza az első alaphalmazon értelmezett $K(x)$ nyitott mondatra, és vizsgáljuk azt, hogy egyáltalán igaz-e itt is, hogy van az elemek között középpontosan szimmetrikus síkidom. Nem csap-juk be ezzel a mondattal azt, aki nem látja a képet, amiről beszélünk? Hiszen minden lap középpon-tosan szimmetrikus a készletünkben!

Itt ismét arról van szó, hogy a köznyelvben kicsit másképpen használjuk ezeket a szavakat néhány esetben, mint a matematikában. A köznyelv szerint nem látjuk értelmét annak, hogy „kevesebbet állítsunk az igazságnál”: ha mind ilyen, akkor mért ne ezt árulnánk el, mért azt mondjuk, hogy van ilyen tulajdonságú lap.

A matematika ezt a két kvantort önmagában értelmezi, és a másiktól függetlenül mondja ki, hogy egy elemet mutassunk a halmazból, amelyre igaz, akkor a „Van olyan elem ...” állítást igaznak tekin-ti függetlenül attól, hogy miféle a többi elem.

Másrészt az előbbieik alapján azt is láthatjuk, hogy a „Minden elem adott tulajdonságú” állítás nem feltétlenül mond többet a készletünkről, mint az egzisztenciális állítás, csak **mást mond**. Hiszen a **van** – legalább 1 ilyen tulajdonságú elem létezését mondja ki, a **mind ilyen** pedig azt zárja ki, hogy volna nem ilyen.

Feladatsor

LOGIKA

1. Adottak a következő elemi állítások:

K: Kirándulni megyünk.

E: Esik az eső.

Formalizálja az alábbi állításokat! (Írja le a szerkezetüket kifejező formulát az elemi állítások és a logikai műveletek segítségével!)

- a) Kirándulunk, noha esik az eső.
- b) Ha esik az eső, nem megyünk kirándulni.
- c) Bár esik az eső, mégis kirándulunk.
- d) Kizárt, hogy esik az eső és kirándulunk.
- e) Vagy esik az eső, vagy kirándulunk.
- f) Kirándulunk, feltéve, hogy nem esik az eső.
- g) Nem igaz, hogy akkor esik az eső, ha kirándulunk.
- h) Csak akkor kirándulunk, ha nem esik az eső.
- i) Csak akkor esik az eső, ha kirándulunk.
- j) Ha kirándulunk, akkor esik az eső, és csak akkor esik az eső, ha kirándulunk.
- k) Akkor és csak akkor kirándulunk, ha nem esik az eső.

2. Formalizálja az állításokat! (Adja meg az elemi állításokat is!)

- a) Éva jól felelt, pedig nem is tanult.
- b) Nemcsak megoldotta, hanem 6be is mutatta.
- c) Nem igaz, hogy ez a szám 2-vel és 3-mal is osztható.
- d) Ha a számokról szóló nyitott mondat két oldalát egyenlőségjel kapcsolja össze, akkor a nyitott mondatot egyenletnek nevezzük.
- e) Változatlan marad az összeg, ha az egyik tagot ugyanannyival növeljük, mint amennyivel a másik tagot csökkentjük.
- f) Fanni hazament, de nem maradt otthon, bár mindenki ezt várta tőle.
- g) Ha hazajössz és be is vásárolsz, nekem nem kell lemennem és megfőzhetem a vacsorát.
- h) Angolból vagy matematikából készülök, de nem készülök mindkettőből.
- i) Kizárt, hogy nem vizsgázom le matematikából vagy pedagógiából első kísérletre, vagy a nyelv-vizsgát nem teszem le márciusig.
- j) Ha pontosak az adatok és jól emlékszem, úgy akkor és csak akkor elég a pénz a nyaralásra, ha beföldre vagy az utószezonban utazunk.
- k) Mindenki itt marad, ha ma írjuk a dolgozatot, de ha nem ma írjuk, akkor vagy moziba megyek, vagy hazautazom.
- l) Ha nem jelentkezem időben a vizsgára, vagy ha nem készülök fel és elégtelent kapok, az utolsó héten kell vizsgáznom.

3. Formalizálja a következő állításokat!

Állapítsa meg értéktáblázat segítségével vagy azonosságok felhasználásával, hogy mely állítások ekvivalensek!

- | | |
|---------------------------------|--|
| a) P, pedig nem is Q. | j) P vagy Q, de nem mindkettő. |
| b) Sem Q, sem P. | k) Akkor P, ha Q. |
| c) Bár nem P, mégis Q. | l) Csak akkor P, ha Q. |
| d) Nem P, ha nem Q. | m) Nem igaz, hogy ha P, akkor egyúttal Q is. |
| e) Nem igaz, hogy P vagy Q. | n) Ha nem P, akkor nem is Q. |
| f) Se nem P, se nem Q. | o) Nem P, feltéve, hogy nem is Q. |
| g) Nem igaz, hogy P noha nem Q. | p) Ha P, akkor Q, de ha nem P, akkor Q sem |
| h) Nem P, noha nem is Q. | r) Ha P, akkor nem Q, de ha nem., akkor Q. |
| i) Q, feltéve, hogy P. | s) Ha Q, akkor nem P, de csak akkor. |

4. Igazolja, hogy a két formula egyenértékű!

- | | |
|--|---|
| a) $(p \wedge q) \vee r$; | $(r \vee p) \wedge (q \vee r)$, |
| b) $(p \wedge q) \rightarrow r$; | $p \rightarrow (q \rightarrow r)$, |
| c) $p \leftrightarrow q$; | $(\neg p \vee q) \wedge \neg (q \wedge \neg p)$, |
| d) $((p \vee q \vee r) \wedge \neg q \wedge \neg r) \rightarrow p$; | i. |

5. Állapítsa meg, hogy vannak-e az alábbi mondatok között azonos jelentésűek!

- Délután tanulok és nem pihenek, vagy este dolgoznom kell.
- Ha délután tanulok és nem pihenek, akkor este nem kell dolgoznom.
- Ha délután nem tanulok, hanem pihenek, akkor este kell dolgoznom.

6. Legyen S az a kijelentés, hogy "Sikerül a vizsgám", R az, hogy "Rendszeresen készülök az órákra". Írja le jelekkel a következő kijelentéseket (formalizáljon)!

- Csak akkor sikerül a vizsgám, ha rendszeresen készülök az órákra.
- Annak, hogy sikerüljön a vizsgám, elégséges feltétele, hogy rendszeresen készülök az órákra.
- Akkor és csak akkor sikerül a vizsgám, ha rendszeresen készülök az órákra.
- A rendszeres készülés az órákra szükséges és elégséges feltétele annak, hogy sikerüljön a vizsgám.
- A rendszeres készülés az órákra a szükséges feltétele annak, hogy sikerüljön a vizsgám.

7. Hozza egyszerűbb alakra az alábbi formulákat!

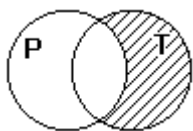
- | | |
|--|---|
| $p \rightarrow p$, | $p \rightarrow i$, |
| $i \vee q$, | $p \rightarrow h$, |
| $p \wedge i$, | $p \vee h$, |
| $p \wedge (p \vee h)$, | $(p \vee \neg p) \wedge h$, |
| $(p \wedge \neg p) \vee i$, | $i \leftrightarrow p$, |
| $p \rightarrow (p \rightarrow q)$, | $h \rightarrow q$, |
| $p \rightarrow \neg p$, | $\neg p \wedge \neg (\neg p \vee q)$, |
| $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$, | $\neg ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$. |

8. $I := \{x \mid x \text{ négyszög}\}$

$P_x := x \text{ paralelogramma}$

$T_x := x \text{ téglalap}$

A P_x nyitott mondat igazsághalmaza P , a T_x nyitott mondat igazsághalmaza T .



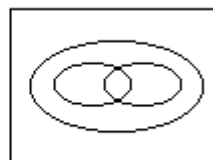
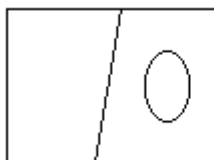
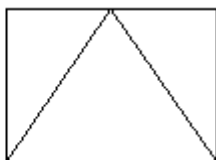
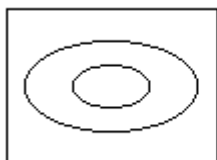
A sáírozott tartomány üres, mert

.....
.....

Készítsen olyan ábrát, amelyiken nincs üres tartomány, de mutatja a két igazsághalmaz (a két fogalom) kapcsolatát!

9. Melyik válogatáshoz, melyik rajz illik?

- a) Természetes számok: 8 többszörösei, 12 többszörösei, 4 többszörösei
- b) Élőlények: emberek, állatok, növények
- c) Játékok: labdák, pingponglabdák
- d) Emberek: felnőttek, gyerekek, óvodások



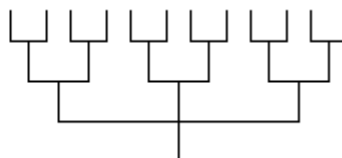
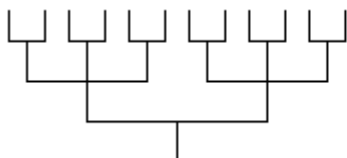
10. Ábrázolja a következő fogalmak kapcsolatát!

- tárgy
- hangszer
- fúvós hangszer
- szórakozást, pihenést szolgáló tárgy
- régi népi fúvós hangszer
- tárogató
- a kurucok által használt régi népi fúvós hangszer

11. Gondoltam egy 1 és 20 közötti számra. Hány szabályos barkochba kérdéssel lehet mindig kitalálni? Készítsen a feladathoz kör-diagramot (vagy táblázatot) és fadiagramot!

Hány dologból lehet egyet kitalálni ugyanannyi kérdéssel, mint a fenti feladatban?

12. Helyezze el a logikai készlet piros lapjait mindkét fadiagramon!



Adjon meg a piros lapok fenti két elrendezésén kívül más sorbarendezést is, majd készítse el ehhez is a fadiagramot!

13. Hány barkochba kérdéssel lehet kitalálni a piros lapok közül egyet?

Hány kérdéssel lehet kitalálni a teljes készletből egy lapot?

14. A_X : x gép

B_X : x kéziszerszám

C_X : x a mezőgazdaságban használt munkaeszköz

D_X : x kasza

E_X : x munkaeszköz

F_X : x traktor

Készítse el a fenti nyitott mondatok igazsághalmazaihoz a kapcsolatukat kifejező ábrát!

15. $Z := \{x \mid x \text{ egész szám}\}$

$P_x := x \text{ páros, } x \in Z$

a) Formalizálja a következő állításokat!

Minden szám páros.

Van páros szám.
Nem minden szám páros.
Minden szám páratlan.
Vannak páratlan számok.
Nincsenek páros számok.
Vannak páratlan számok.
Nem minden szám páratlan.
Van olyan szám, amelyik páratlan.
Nincs olyan szám, amelyik ne lenne páros.
Nem minden számra igaz, hogy nem páros.
Minden szám páros is és páratlan is.
Minden szám páros vagy páratlan.

- b) Keressen a fentiek között olyan állításokat, amelyek egyenértékűek és olyanokat, amelyek egymás tagadásai!

Felhasznált és ajánlott irodalom:

Varga Tamás: Matematikai logika kezdőknek I-II.
Tankönyvkiadó, Bp. 1969.

Pólos László - Ruzsa Imre: A logika elemei
Tankönyvkiadó, Bp. 1987.

Tóth Mihály: Feladatok a matematikai logika „Kijelentéskalkulus” és „Osztálykalkulus”
című fejezetekből, Tankönyvkiadó, Bp. 1980.

Urbán János: Matematikai logika (Példatár)
Műszaki Könyvkiadó, Bp. 1983.

Dr. Gál Györgyné: Logikai gyakorlatok
Fővárosi Pedagógiai Központ 1974.

Általános iskolai tankönyvek, munkafüzetek, feladatgyűjtemények